УДК 53.088; 519.65

ИНФОРМАЦИОННО-ИЗМЕРИТЕЛЬНАЯ СИСТЕМА С ЛАГРАНЖЕВОЙ АППРОКСИМАЦИЕЙ ДЛЯ ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНО-РАСЧЕТНОГО ОПРЕДЕЛЕНИЯ УСИЛИЙ В ЭЛЕМЕНТАХ КОНСТРУКТИВНЫХ СИСТЕМ ПРИ ОБСЛЕДОВАНИИ ЗДАНИЙ ТЕКСТИЛЬНОЙ И ХИМИЧЕСКОЙ ПРОМЫШЛЕННОСТИ

INFORMATION-MEASURING SYSTEM OF EXPERIMENTAL-CALCULATION DETERMINATION SOME EFFORT WITH THE LAGRANGE APPROXIMATION IN CONSTRUCTIVE ELEMENTS IN THE SURVE OF TEXTILE AND CHEMICAL INDUSTRIAL BUILDINGS

А.П. ЛОКТИОНОВ
A.P. LOKTIONOV

(Юго-Западный государственный университет)
(Southwest State University)
E-mail: loapa@mail.ru

В работе рассматриваются актуальные вопросы повышения эффективности экспериментально-расчетного определения опорного момента в элементах конструкций при обследовании зданий текстильной и химической промышленности в условиях недостаточной точности задания начальных параметров (осадка опоры, угол поворота опорного сечения). Представлены: модель информационно-измерительной системы с учетом предлагаемых автором основных принципов, положений и требований, оптимальные характеристики распределения датчиков и формулы оценки неопределенности вычисления опорного момента.

The paper deals with topical issues of improving the efficiency of experimental and calculated determination of a reference point in the structural elements in the survey of textile and chemical industrial buildings in a lack of precision in setting the initial parameters (bearing sludge, the reference section of the angle of rotation). Presents: a model information-measuring system based on the author of the proposed basic principles, regulations and requirements, the optimal characteristics of the distribution of the sensors and the evaluation formula calculating the uncertainty of the reference point.

Ключевые слова: обратная начальная задача, начальные условия, лагранжева аппроксимация, информационно-измерительная система, регуляризация, агрегация.

Keywords: inverse initial-value problem, initial conditions, approximation Lagrange, information-measuring system, regularization, aggregation.

В технических приложениях по сигналам датчиков решением обратной задачи вычисляют неизмеряемые входные данные расчетной схемы конструкций, уточняют начальные условия, допускающие их зависимость от внешней нагрузки [1, с. 550], [2, с. 156, 157]. В работе автора [3, с. 16, 25, 278, 284] сообщалось, что в задаче экспериментально-расчетного определения деформативных характеристик элементов механических конструкций эффективно использование теории и аппарата редукции изме-

рений, методов аппроксимации. В работе [4] показано, что редукция измерений позволила определять опорный момент консольной балки, нагруженной поперечной сосредоточенной силой, если не заданы начальные условия. Определение опорного момента балки реализовано лагранжевой аппроксимацией второй производной функции прогиба при дискретизации прогибов в четырех отсчетных точках и численном дифференцировании информационно-измерительной системой (ИИС).

В статье предлагается развитие метода, основанного на редукции измерений и лагранжевой аппроксимации для численного дифференцирования, на экспериментально-расчетное определение начального параметра объекта при равномерно распределенной нагрузке.

Редукция измерений – это формализм, позволяющий по результатам измерений в наблюдаемой системе "измеряемый объект – среда – ИИС" получать наиболее точное описание ненаблюдаемой системы "исследуемый объект – среда" [5, с. 110…113]. Характеристики измеряемого объекта, в отличие от исследуемого, искажены взаимодействием с ИИС, в частности, с ее измерительным компонентом (ИК), включающим преобразовательную агрегацию датчиков и канал связи, а в некоторых случаях и со средой. Алгоритм, реализуемый ИИС, в частности, ее вычислительным компонентом (ВК), извлекает из выходного сигнала ИК максимально точные значения представляющих интерес целевых характеристик исследуемого объекта, недоступных для прямого изучения [3, с. 13].

Особенности обратных задач численного дифференцирования и использования аппарата редукции измерений без утраты общности рассматриваем на примере контроля силового элемента (СЭ) механической конструкции – прямоосной упругоизгибаемой консольной балки длиной ℓ с постоянной жесткостью на изгиб EI, нагруженной равномерно распределенной нагрузкой интенсивностью q. В СЭ измеряют прогибы, контролируют целевую характеристику СЭ – опорный момент M_0.

Цель данной работы – достичь предельных оптимальных соотношений в преобразовательной агрегации ИК по классу преобразования, количеству и размещению датчиков на измеряемом объекте.

Повышение эффективности редукции измерений связано с оптимизацией преобразовательной агрегации ИК. Используем в ИК два класса преобразования датчиков и сигналов ИК (отсчетов прогибов $y^*(x_i)$) [4]. При p-преобразовании отсчетов выполняется равномерная непрерывная норма абсолютной величины неопределенности измерений датчиками и каналом связи соотношениями:

$$\|\Delta y(x_i)\| = \Delta_m(y(x_i)) = \varepsilon_p y_p \geq \Delta(y(x_i)) = |y^*(x_i) - y(x_i)|, \qquad (1)$$

где $\Delta_m(y(x_i))$ – верхние границы абсолютных значений неопределенности измерений отсчетов; y_p– предел измерений, равный верхней границе $\sup|y^*(x_i)|$ на компактном наборе вещественных чисел $\{y^*(x_1), \ldots, y^*(x_n)\}$; ε_p – приведенная неопределенность измерений; n – количество датчиков.

При pi-преобразовании отсчетов, учитывающем возможность использования датчиков с разными пределами измерений $y_{pi} = |y(x_i)|$, выполняются соотношения:

$$\Delta_m(y(x_i)) = \varepsilon_p y_{pi} \geq \Delta(y(x_i)). \qquad (2)$$

Функция отсчетов $y^*(x)$ есть общее решение линейного дифференциального уравнения [3, с. 12, 26]. Для восстановления целевой характеристики СЭ используем обратную начальную задачу второго порядка с правой частью, представляемую функцией [6]:

$$f(x) = y''(0),\ x \in I, \qquad (3)$$

где y(x) – решение начальной задачи с дифференциальным уравнением:

$$D^4 y = f_д(x); \qquad (4)$$

$I = [0, \ell]$ – отрезок задания решения при физических ограничениях в общем случае на неравномерную сетку аппроксимации вида:

$$0 < a \le x_i \le b < \ell; \qquad (5)$$

D^4 – стационарный дифференциальный оператор четвертого порядка; $f_д(x) = q/EI = const$ – внешняя нагрузка в уравнении (4).

Для учета принципа Сен-Венана следует размещать датчики вне зоны опирания балки, например, по [7] или [8] на отрезке [a, b] при:

$$a = 0{,}05\ell,\ b = 0{,}95\ell. \qquad (6)$$

Вместе с функцией f(x) в отсчеты $y^*(x_i)$ канала связи ИК преобразуется и совокупность других аргументов, характеризующих влияющие величины, в том числе относящиеся к внешней среде. Редукция измерений в ИИС включает приближение к искомой функции f(x) – получение приближенной функции $f^*(x)$ решением обратной задачи, обеспечивающей минимальное значение уровня неопределенности определения непосредственно не измеряемой целевой характеристики объекта.

Множество значений $\{y_i^*\}$ образует пространство наблюдений – конечномерное координатное эвклидово пространство измеренных отсчетов на сетке (5), что позволяет вычислять значение функции (3) с использованием лагранжевой одномерной аппроксимации первой степени [9]:

$$y''(0) \approx S_n(y) = \frac{1}{\ell^2}\sum_{i=1}^{n} L_i y^*(x_i), \quad L_i \in R, \qquad (7)$$

где L_i – лагранжевы коэффициенты; R – множество действительных чисел.

Рассмотрим процедуру использования редукции измерений при полиномиальных методах аппроксимации для численного дифференцирования (7) в терминах и обозначениях предлагаемой методики. В качестве критериев оценивания эффективности редукции измерений используем абсолютное ν_Δ и относительное ν_δ число обусловленности задачи редукции по соотношениям:

$$\Delta_m(f) \le \nu_\Delta \sup\Delta_m(y),\ \delta_m(f) \le \nu_\delta\, \varepsilon_p, \qquad (8)$$

где $\Delta_m(f)$, $\delta_m(f)$, $\Delta_m(y)$ – соответственно верхние границы абсолютных и относительных значений неопределенности решения и измерений отсчетов.

Предельные оптимальные соотношения в преобразовательной агрегации ИК по классу преобразования, количеству и размещению датчиков на контролируемом СЭ достигаются регуляризацией агрегации с получением минимального числа обусловленности задачи редукции измерений – меры структурной погрешности задачи.

Регуляризация состоит в выборе класса преобразования сигналов и оптимального распределения узлов сетки аппроксимации (5).

Единой стратегии выбора оптимальных узлов сетки, гарантирующей сходимость процесса получения меры структурной погрешности задачи редукции измерений для всех непрерывных на отрезке [a, b] функций, нет [10, с. 214]. Получены отдельные частные результаты, например, в работах [3, с. 276], [8].

Особенности обратных задач численного дифференцирования и процедуры использования редукции измерений без утраты общности рассматриваем на примере функции y(x) четвертой степени с частными решениями уравнения (4):

$$y(x_i) = \xi_0 + \xi_1 x_i + \xi_2 \frac{x_i^2}{2}\gamma_i, \qquad (9)$$

где ξ_0, ξ_1, $\xi_2 = y''(0) = \frac{M_0}{EI} = \frac{q}{2EI}\ell^2$ – начальные параметры функции y(x) в обратной начальной задаче нахождения искомой функции (3) в задаче Коши;

$$\gamma_i = 1 - \frac{2x_i}{3\ell} + \frac{x_i^2}{6\ell^2}, \quad i = 1, 2, 3.$$

Рассматриваем технически реализуемые задачи, когда выполняются условия:

$$|\xi_0 + \xi_1 x_i| << |y(x_i)|,$$

при которых из уравнения (9) следует приближенное равенство:

$$\xi_2 \approx y(x_i)\frac{2}{x_i^2\gamma_i}. \qquad (10)$$

На сетке (5) трех отсчетов $y(x_i)$ достаточно для определения ξ_2 из соотношений (9), если неизвестны параметры ξ_0, ξ_1 или высока погрешность их задания, известно значение параметра ℓ. Для того чтобы аппроксимационный многочлен вида (7) при n = 3 и использовании уравнения (9) не был функцией параметров ξ_0, ξ_1, необходимо выполнить условия:

$$\sum_{i=1}^{3} L_i = 0, \quad \sum_{i=1}^{3} L_i x_i = 0, \quad 2\ell^2 = \sum_{i=1}^{3} L_i x_i^2 \gamma_i ,$$

которым удовлетворяют коэффициенты:

$$L_1 = \frac{2}{K_q}(\alpha_{3\ell} - \alpha_{2\ell}),$$
$$L_2 = -\frac{2}{K_q}(\alpha_{3\ell} - \alpha_{1\ell}), \qquad (11)$$
$$L_3 = \frac{2}{K_q}(\alpha_{2\ell} - \alpha_{1\ell}),$$

где $\alpha_{i\ell} = \frac{x_i}{\ell}$;

$$K_q = (\alpha_{3\ell} - \alpha_{2\ell})\gamma_1 - (\alpha_{3\ell} - \alpha_{1\ell})\gamma_2 + (\alpha_{2\ell} - \alpha_{1\ell})\gamma_3. \qquad (12)$$

Решение (7) при n=3 отвечает возмущенным исходным данным – отсчетам $y^*(x_i)$, уровню ошибок исходных данных в пределах неопределенности каждого отсчета. Суммарная абсолютная $\Delta\xi_2$ и относительная $\delta\xi_2$ неопределенности определения ξ_2 по всем трем отсчетным точкам равны:

$$\Delta\xi_2 = \frac{1}{\ell^2}\sum_{i=1}^{3}\left|L_i \Delta y(x_i)\right|,$$
$$\qquad (13)$$
$$\delta\xi_2 = \frac{1}{\ell^2|\xi_2|}\sum_{i=1}^{3}\left|L_i \Delta y(x_i)\right|.$$

Если три отсчета функции (9) выполняются р-преобразованием, причем $y_p = |y(x_3)|$, то абсолютное и относительное числа обусловленности задачи определения параметра ξ_2 по (8) можно представить функциями:

$$v_\Delta = \frac{1}{\ell^2}\sum_{i=1}^{3}|L_i| = \frac{4}{\ell^2|K_q|}(\alpha_{3\ell} - \alpha_{1\ell}),$$
$$\qquad (14)$$
$$v_\delta = \frac{1}{2}\alpha_{3\ell}^2\gamma_3\left(\sum_{i=1}^{3}|L_i|\right),$$

где коэффициент K_q вычисляется по формуле (12).

При выводе формул (14) использованы соотношения (1), (8), (10) при $x_i = x_3$, (11) и (13).

Регуляризируем данную задачу с числами обусловленности (14) численным методом. Результат регуляризации на отрезке (6) – абсолютная мера структурной погрешности $(v_\Delta)_{min} = 64/\ell^2$ при распределении узлов сетки (5) с точностью двух знаков после запятой $\alpha_{1\ell} = 0{,}05$, $\alpha_{2\ell} = 0{,}39$, $\alpha_{3\ell} = 0{,}95$ и относительная мера структурной погрешности $(v_\delta)_{min} = 12{,}95$ при распределении узлов сетки (5) $\alpha_{1\ell} = 0{,}050$, $\alpha_{2\ell} = 0{,}233$, $\alpha_{3\ell} = 0{,}450$ (рис. 1 – зависимость числа обусловленности от координаты отсчета x_3 по второй формуле (14)). Без регуляризации, например, при $\alpha_{1\ell} = 0{,}15$, относительное число обусловленности задачи более 30.

На рис. 1 представлена зависимость числа обусловленности от координат отсчетов: а) – по формуле (20) при $x_2 = 0{,}233\ell$; б) – по формуле (23) $x_2 = 0{,}094\ell$; 1 – $x_1 = 0{,}150\ell$; 2 – $x_1 = 0{,}100\ell$; 3 – $x_1 = 0{,}050\ell$; 4 – $x_1 = 0{,}080\ell$; 5 – $x_1 = 0{,}065\ell$.

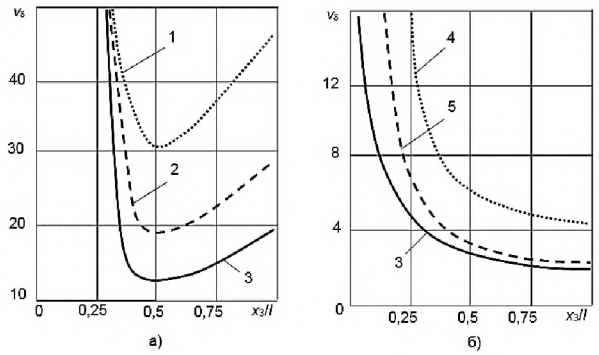


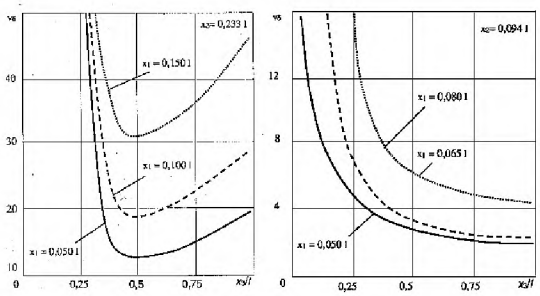
Рис. 1

Если три отсчета функции (9) выполняются pi-преобразованием, то абсолютное и относительное числа обусловленности задачи определения параметра ξ_2 представим функциями:

$$\nu_\Delta = \frac{\sum_{i=1}^{3}\left|L_i\alpha_{i\ell}^2\gamma_i\right|}{\ell^2\alpha_{3\ell}^2\gamma_3},$$

$$\nu_\delta = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{3}\left|L_i\alpha_{i\ell}^2\gamma_i\right|. \qquad (15)$$

При выводе формул (15) использованы выражение (10), соотношения (2), (8) и (13).



а) б)

Рис. 2

Подставляем коэффициенты (11) в формулы (15) и регуляризируем данную задачу численным методом. Результат регуляризации на отрезке (6) – абсолютная мера структурной погрешности $(\nu_\Delta)_{min} = 8{,}4/\ell^2$ при распределении узлов сетки (5) с точностью трех знаков после запятой $\alpha_{1\ell} = 0{,}050$, $\alpha_{2\ell} = 0{,}094$, $\alpha_{3\ell} = 0{,}950$ и относительная мера структурной погрешности $(\nu_\delta)_{min} = 2{,}0$ при распределении узлов сетки (5) $\alpha_{1\ell} = 0{,}050$, $\alpha_{2\ell} = 0{,}094$, $\alpha_{3\ell} = 0{,}950$ (рис. 2 – зависимость числа обусловленности от координат отсчетов по второй формуле (15)). Если в (6) $a > 0{,}080\ \ell$, $\alpha_{3\ell} < 0{,}250$, то относительная мера более 16.

Сопоставлением значений абсолютной $M_\Delta = \ell^2(\nu_\Delta)_{min}$ и относительной $M_\delta = (\nu_\delta)_{min}$ мер структурной погрешности задачи редукции исследованных в данной работе измерительных агрегаций с тремя датчиками, когда не заданы начальные параметры ξ_0 и ξ_1, а также исследованных ранее вариантов использования единственного датчика с различными комбинациями начальных параметров ξ_0 и ξ_1: при заданных значениях параметров ξ_0 и ξ_1 [11], при заданном значении только параметра ξ_0 ([12] и [13]), при заданном значении только параметра ξ_1 ([11] и [13]) установлены низкие значения мер структурной погрешности задачи при использовании более сложных в реализации измерительных агрегаций с pi-преобразованием датчиков и сигналов (табл. 1 – значения меры структурной погрешности задачи редукции).

Таблица 1

Заданные начальные параметры	–				ξ_0				ξ_1				ξ_0, ξ_1	
Вид преобразования отсчетов	p		pi		p		pi		p		pi		p	
Вид меры погрешности	M_Δ	M_δ	M_Δ	M_δ	M_Δ	M_δ	M_Δ	M_δ	M_Δ	M_δ	M_Δ	M_δ	M_Δ	M_δ
Значение меры	64	13	8,4	2,0	36	6,0	5,2	1,2	8,6	2,0	4,3	1,0	4,3	1,0

ВЫВОДЫ

1. Создана ИИС с учетом предложенных основных принципов, положений и требований. В ИИС исследованы характеристики: преобразовательной агрегации ИК, обратной начальной задачи, редукции измерений, численного дифференцирования, лагранжевой одномерной аппроксимации опорного момента, критериев оценивания эффективности редукции измерений, оптимизации распределения датчиков прогиба по консольной балке при равномерно распределенной нагрузке.

2. Получена методика выбора измерительных агрегаций с учетом требуемого уровня неопределенности искомой функции при известных ограничениях на характеристики датчиков и начальные параметры решения начальной задачи. В качестве критериев оценивания эффективности редукции измерений использованы абсолютное и относительное число обусловленности задачи редукции.

3. Предложенная методика позволяет принимать решение об использовании сравнительно простых измерительных агрегаций с классом р-преобразования датчиков и сигналов ИК или для понижения значения минимального числа обусловленности задачи использовать более сложные в реализации агрегации с pi-преобразованием датчиков и сигналов ИК.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Казачек В.Г., Нечаев Н.В., Нотенко С.Н. и др.* Обследование и испытание зданий и сооружений / Под ред. В. И. Римшина. – М.: Высшая школа, 2007.

2. *Землянский А.А.* Обследование и испытание зданий и сооружений. –М.: Изд-во АСВ, 2002.

3. *Локтионов А.П.* Структурная регуляризация подсистемы преобразовательного компонента преобразовательно-вычислительных систем. – Курск : Курск. гос. техн. ун-т, 2009.

4. *Локтионов А. П.* Экспериментально-расчетный метод определения опорного момента консольной балки // Промышленное и гражданское строительство. – 2014, № 2. С. 15…19.

5. *Сизиков В.С.* Математические методы обработки результатов измерений. – СПб.: Политехника, 2001.

6. *Локтионов А.П., Максимов Ю.А., Титов В.С.* О численном дифференцировании в обратной задаче Коши // Региональный сб. научн. тр.: Сварка и родственные технологии в машиностроении и электронике. Вып. 4. – Курск: КурскГТУ, 2002. С.263…268.

7. *Локтионов А.П.* Модель исследования внутренних силовых факторов в элементах конструкций по прогибам // Изв. вузов. Строительство. – 2006, №7. С. 93…98.

8. *Локтионов А.П.* Принцип построения системы управления исследованиями и испытаниями механических конструкций на основе редукции преобразований // Приборы и системы. Управление, контроль, диагностика. – 2010, № 6. С. 57…61.

9. *Loktionov A.P.* Regularization of the lattice time function of the signal in the communication channel // Telecommunications and Radio Engineering. –V. 72, i2, 2013. P. 161…171.

10. *Бабенко К.И.* Основы численного анализа. – М.-Ижевск: НИЦ "Регулярная и хаотическая динамика ", 2002.

11. *Локтионов А.П.* Об учете начальных условий в обратной начальной задаче при постоянной внешней нагрузке // Изв. Юго-Западного гос. ун-та. Серия: Управление, вычислительная техника, информатика. Медицинское приборостроение. – 2013, № 1. С. 181…186.

12. *Локтионов А.П.* О полиномиальной аппроксимации в обратной начальной задаче при постоянной внешней нагрузке // Изв. Юго-Западного гос. ун-та. Серия: Управление, вычислительная техника, информатика. Медицинское приборостроение. – 2013, № 1. С. 48…52.

13. *Локтионов А.П.* О численном дифференцировании при постоянной внешней нагрузке и с *pi*-преобразованием входных данных // Изв. Юго-Западного гос. ун-та. Серия: Управление, вычислительная техника, информатика. Медицинское приборостроение. – 2013, № 1. С. 133…137.

REFERENCES

1. Kazachek V.G., Nechaev N.V., Notenko S.N. i dr. Obsledovanie i ispytanie zdanij i sooruzhenij / Pod red. V. I. Rimshina. – M.: Vysshaja shkola, 2007.

2. Zemljanskij A.A. Obsledovanie i ispytanie zdanij i sooruzhenij. –M.: Izd-vo ASV, 2002.

3. Loktionov A.P. Strukturnaja reguljarizacija podsistemy preobrazovatel'nogo komponenta preobrazovatel'no-vychislitel'nyh sistem. – Kursk : Kursk. gos. tehn. un-t, 2009.

4. Loktionov A. P. Jeksperimental'no-raschetnyj metod opredelenija opornogo momenta konsol'noj balki // Promyshlennoe i grazhdanskoe stroitel'stvo. – 2014, № 2. S. 15…19.

5. Sizikov V.S. Matematicheskie metody obrabotki rezul'tatov izmerenij. – SPb.: Politehnika, 2001.

6. Loktionov A.P., Maksimov Ju.A., Titov V.S. O chislennom differencirovanii v obratnoj zadache Koshi // Regional'nyj sb. nauchn. tr.: Svarka i rodstvennye tehnologii v mashinostroenii i jelektronike. Vyp. 4. – Kursk: KurskGTU, 2002. S.263…268.

7. Loktionov A.P. Model' issledovanija vnutrennih silovyh faktorov v jelementah konstrukcij po progibam // Izv. vuzov. Stroitel'stvo. – 2006, № 7. S. 93…98.

8. Loktionov A.P. Princip postroenija sistemy upravlenija issledovanijami i ispytanijami mehanicheskih konstrukcij na osnove redukcii preobrazovanij // Pribory i sistemy. Upravlenie, kontrol', diagnostika. – 2010, №6. S. 57…61.

9. Loktionov A.P. Regularization of the lattice time function of the signal in the communication channel // Telecommunications and Radio Engineering. –V. 72, i2, 2013. P. 161…171.

10. Babenko K.I. Osnovy chislennogo analiza. – M.-Izhevsk: NIC "Reguljarnaja i haoticheskaja dinamika ", 2002.

11. Loktionov A.P. Ob uchete nachal'nyh uslovij v obratnoj nachal'noj zadache pri postojannoj vneshnej nagruzke // Izv. Jugo-Zapadnogo gos. un-ta. Serija: Upravlenie, vychislitel'naja tehnika, informatika. Medicinskoe priborostroenie. – 2013, № 1. S.181…186.

12. Loktionov A.P. O polinomial'noj approksimacii v obratnoj nachal'noj zadache pri postojannoj vneshnej nagruzke // Izv. Jugo-Zapadnogo gos. un-ta. Serija: Upravlenie, vychislitel'naja tehnika, informatika. Medicinskoe priborostroenie. – 2013, № 1. S. 48…52.

13. Loktionov A.P. O chislennom differencirovanii pri postojannoj vneshnej nagruzke i s pi-preobrazovaniem vhodnyh dannyh // Izv. Jugo-Zapadnogo gos.

un-ta. Serija: Upravlenie, vychislitel'naja tehnika, informatika. Medicinskoe priborostroenie. – 2013, № 1. S.133…137.

Рекомендована кафедрой промышленного и гражданского строительства. Поступила 04.03.16.