УДК 534.11

РАСПРОСТРАНЕНИЕ УДАРНОГО ИМПУЛЬСА В КУСОЧНО-ОДНОРОДНОМ СТЕРЖНЕ С ВЯЗКОУПРУГИМ ЭЛЕМЕНТОМ

THE PROPAGATION OF THE SHOCK PULSE IN A PIECEWISE-HOMOGENEOUS ROD WITH A VISCOELASTIC ELEMENT

А.В. ПАШКОВ
A.V. PASHKOV

(Национальный исследовательский Московский государственный строительный университет)
(National Research Moscow State University of Civil Engineering)
E-mail: PashkovAV@mgsu.ru

В статье представлено решение задачи о распространении волн напряжений в составном полубесконечном стержне с вязкоупругим элементом при воздействии на его торец ударного импульса. Показан процесс распространения волны с учетом ее преломления и отражения на границах вязкоупругого и упругого элементов стержня, а также трансформация импульса при его прохождении через вязкоупругий элемент. Результаты могут быть использованы при разработке мер, снижающих динамические нагрузки на детали машин и конструкции зданий текстильной промышленности.

The paper presents the solution of the problem of propagation of stress waves in a composite rod with a semi-infinite viscoelastic element when exposed at its end face of the shock pulse. Shows the process of wave propagation, taking into account the refraction and reflection at the boundaries of viscoelastic and elastic elements of stem as well as the transformation of the pulse as it passes through a viscoelastic element. The results can be used to develop measures that reduce the dynamic loads on machine parts and constructions of buildings of the textile industry.

Ключевые слова: кусочно-однородные стержни, вязкоупругие среды, волновые процессы, ударный импульс, волны напряжений.

Keywords: piecewise-homogeneous rods, viscoelastic media, wave processes, shock pulse, waves of stress.

Производительность оборудования текстильной промышленности напрямую связана с его скоростными характеристиками. Увеличение скорости элементов оборудования ведет к увеличению динамических нагрузок как на его узлы и детали, приводя их к преждевременному износу, так и на элементы строительных конструкций, вызывая вибрационные явления, негативно сказывающиеся на их прочностных свойствах, а также на здоровье персонала [1].

Разработка методов борьбы с негативным влиянием динамических нагрузок требует, в частности, исследования распространения волн напряжений и деформаций в конструктивных элементах машин и производственных зданий и сооружений, среди которых большое распространение имеют стержневые системы.

Обеспечение надежной работы конструкций при динамических воздействиях повышает безопасность эксплуатации таких производственных зданий [2...6].

Рассмотрим полубесконечный составной стержень постоянного сечения из двух частей, состоящих из разных материалов (рис. 1). Причем материал первой, конечной, части ($0 \le x \le \ell$) обладает вязкоупругими свойствами. Параметры материала этой части стержня будем обозначать индексом "1 ", а параметры материала второй, упругой, части ($x>\ell$) – индексом "2 ". По торцу стержня ($x = 0$) происходит нормальный удар интенсивности F(t).

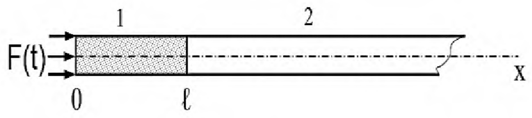

Рис. 1

Задача сводится к системе уравнений:

$$\frac{\partial^2 U_1}{\partial x^2} - \int_0^t f(t-\xi)\frac{\partial^2 U_1}{\partial x^2}d\xi = \frac{1}{a_1^2}\frac{\partial^2 U_1}{\partial t^2} \quad (0 \le x \le \ell),$$

$$\frac{\partial^2 U_2}{\partial x^2} = \frac{1}{a_2^2}\frac{\partial^2 U_2}{\partial t^2} \quad (x > \ell) \qquad (1)$$

с граничными условиями

$$x=0: \quad \sigma_{xx}^{(1)} = -F(t),$$

$$x=\ell: \quad U_1 = U_2, \quad \sigma_{xx}^{(1)} = \sigma_{xx}^{(2)},$$

$$x \to \infty: \quad U_2 \to 0,$$

где $a_i = \sqrt{E_i/\rho_i}$ – скорость распространения волны в i-й части стержня; E_i – модуль упругости i-й части стержня: ρ_i – плотность i-й части стержня.

Начальные условия нулевые.

Ядро вязкоупругого оператора имеет вид [7]:

$$f(t)=\sum\frac{\gamma_n}{\tau_n}e^{t/\tau_n},$$

где γ_n, τ_n – параметры вязкости.

Применив к системе (1) интегральное преобразование Лапласа по t, для преобразованных перемещений

$$U_{10}=\int_0^t U_1e^{-pt}dt, \quad U_{20}=\int_0^t U_2e^{-pt}dt,$$

получим систему

$$\frac{\partial^2U_{10}}{\partial x^2}=\frac{Q^2(p)}{a_1^2}U_{10} \quad (0\le x\le \ell),$$

$$\frac{\partial^2U_{20}}{\partial x^2}=\frac{p^2}{a_2^2}U_{20} \quad (x>\ell) \tag{2}$$

с граничными условиями:

$$x=0: \quad \frac{dU_{10}}{dx}=-\frac{1}{\rho_1a_1^2}F_0(p),$$

$$x=\ell: \quad U_{10}=U_{20}, \quad \rho_1a_1^2\frac{dU_{10}}{dx}=\rho_2a_2^2\frac{dU_{20}}{dx}, \tag{3}$$

$$x\to\infty: \quad U_{20}\to 0,$$

где $Q^2(p)$ приближенно можно представить в виде [8]:

$$Q^2(p)=\frac{p^2}{1-f_0(p)}\approx\left(p+\frac{c_1}{2}\right)^2+c_0^2,$$

$$c_0^2=c_1^2/4+c_2, \quad c_1=\sum\gamma_n/\tau_n, \quad c_2=\sum\sum\gamma_m\gamma_j\left(\tau_m^{-1}-\tau_j^{-1}\right).$$

Общее решение системы (2) имеет вид:

$$U_{10}=A_1e^{-\frac{Q}{a_1}x}+B_1e^{\frac{Q}{a_1}x},$$

$$U_{20}=A_2e^{-\frac{p}{a_2}x}+B_2e^{\frac{p}{a_2}x}. \tag{4}$$

Тогда напряжения будут определяться следующим образом:

$$\sigma_{xx}^{(1)}=\rho_1a_1^2\frac{dU_{10}}{dx}=-\rho_1a_1^2A_1e^{-\frac{Q}{a_1}x}+\rho_1a_1^2B_1e^{\frac{Q}{a_1}x},$$

$$\sigma_{xx}^{(2)}=\rho_2a_2^2\frac{dU_{20}}{dx}=-\rho_2a_2^2A_2e^{-\frac{Q}{a_2}x}+\rho_2a_2^2B_2e^{\frac{Q}{a_2}x}. \tag{5}$$

Подставляя выражения (4), (5) в граничные условия (3), определяем коэффициенты A_i, B_i:

$$A_1=\frac{Q(p)F_0(p)}{\rho_1a_1p^2}\frac{S_2e^{\left(\frac{Q}{a_1}-\frac{p}{a_2}\right)\ell}}{S_2e^{\left(\frac{Q}{a_1}-\frac{p}{a_2}\right)\ell}-S_1e^{-\left(\frac{Q}{a_1}+\frac{p}{a_2}\right)\ell}},$$

$$B_1=\frac{Q(p)F_0(p)}{\rho_1a_1p^2}\frac{S_1e^{-\left(\frac{Q}{a_1}+\frac{p}{a_2}\right)\ell}}{S_2e^{\left(\frac{Q}{a_1}-\frac{p}{a_2}\right)\ell}-S_1e^{-\left(\frac{Q}{a_1}+\frac{p}{a_2}\right)\ell}},$$

$$A_2=\frac{2Q(p)F_0(p)}{pS_1}\frac{1}{S_2e^{\left(\frac{p}{a_1}-\frac{p}{a_2}\right)\ell}-S_1e^{-\left(\frac{p}{a_1}+\frac{p}{a_2}\right)\ell}},$$

$$B_2=0,$$

или

$$A_1=\frac{Q(p)F_0(p)}{\rho_1a_1p^2}\sum_{m=0}^{\infty}\left(\frac{S_1}{S_2}\right)^m e^{-\frac{2Qm}{a_1}\ell},$$

$$B_1=\frac{Q(p)F_0(p)}{\rho_1a_1p^2}\sum_{m=0}^{\infty}\left(\frac{S_1}{S_2}\right)^{m+1} e^{-\frac{2Q(m+1)}{a_1}\ell}, \tag{6}$$

$$A_2=\frac{2Q(p)F_0(p)}{pS_2}e^{\left(\frac{p}{a_2}-\frac{Q}{a_1}\right)\ell}\sum_{m=0}^{\infty}\left(\frac{S_1}{S_2}\right)^m e^{-\frac{2Qm}{a_1}\ell},$$

$$B_2=0,$$

где

$$S_1=\rho_1a_1Q(p)-\rho_2a_2p,$$

$$S_2=\rho_1a_1Q(p)+\rho_2a_2p.$$

Отношение S_1/S_2 можно представить в виде:

$$\frac{S_1}{S_2}=-\left\{1+2\sum_q(-1)^q\left(\frac{\rho_1 a_1}{\rho_2 a_2}\right)^q\left(\frac{p}{Q(p)}\right)^q\right\}.$$

Подставив выражения (6) в общее решение (4) и выражения (5), для преобразованных перемещений получим:

$$U_{10}=\frac{Q(p)F_0(p)}{\rho_1 a_1 p^2}\left\{\sum_{m=0}^{\infty}\left(\frac{S_1}{S_2}\right)^m e^{-\frac{Q}{a_1}(x+2m\ell)}+\sum_{m=0}^{\infty}\left(\frac{S_1}{S_2}\right)^{m+1} e^{-\frac{Q}{a_1}[2(m+1)\ell-x]}\right\},$$

$$U_{20}=\frac{2Q(p)F_0(p)}{pS_2}\sum_{m=0}^{\infty}\left(\frac{S_1}{S_2}\right)^m e^{-\left[\frac{Q(2m+1)\ell}{a_1}+\frac{(x-\ell)p}{a_2}\right]},$$

а для преобразованных напряжений:

$$\sigma_{xx}^{(1.0)}=F_0(p)\left\{-\sum_{m=0}^{\infty}\left(\frac{S_1}{S_2}\right)^m e^{-\frac{Q}{a_1}(x+2m\ell)}+\sum_{m=0}^{\infty}\left(\frac{S_1}{S_2}\right)^{m+1} e^{-\frac{Q}{a_1}[2(m+1)\ell-x]}\right\},$$

$$\sigma_{xx}^{(2.0)}=-F_0(p)\frac{2\rho_2 a_2 Q(p)}{S_2}\sum_{m=0}^{\infty}\left(\frac{S_1}{S_2}\right)^m e^{-\left[\frac{Q(2m+1)\ell}{a_1}+\frac{(x-\ell)p}{a_2}\right]}. \qquad (7)$$

Обратим по p выражения для напряжений (7), заметив предварительно, что для волновых процессов, то есть при $p\to\infty$, отношение S_1/S_2 близко к постоянному значению:

$$\frac{S_1}{S_2}=\frac{\rho_1 a_1-\rho_2 a_2}{\rho_1 a_1+\rho_2 a_2}.$$

Тогда для напряжений σ_{xx} получим выражения:

$$\sigma_{xx}^{(1)}=-\sum_{m=1}^{m_0}\left(\frac{\rho_1 a_1-\rho_2 a_2}{\rho_1 a_1+\rho_2 a_2}\right)^m\left\{e^{-\frac{c_1(x+2m\ell)}{2a_1}}F\left(t-\frac{x+2m\ell}{a_1}\right)-\right.$$

$$\left.-\frac{c_0(x+2m\ell)}{a_1}\int\limits_{\frac{x+2m\ell}{a_1}}^{t}e^{-\frac{c_1\xi}{2}}F(t-\xi)\frac{I_1\left[c_0\sqrt{\xi^2-(x+2m\ell)^2/a_1^2}\right]}{\sqrt{\xi^2-(x+2m\ell)^2/a_1^2}}d\xi\right\}+$$

$$+\sum_{m=1}^{m_1}\left(\frac{\rho_1 a_1-\rho_2 a_2}{\rho_1 a_1+\rho_2 a_2}\right)^{m+1}\left\{e^{-\frac{c_1[x-2(m+1)\ell]}{2}}F\left(t-\frac{2(m+1)\ell-x}{a_1}\right)-\right.$$

$$\left.-\frac{c_0[2(m+1)\ell-x]}{a_1}\int\limits_{\frac{2(m+1)\ell-x}{a_1}}^{t}e^{-\frac{c_1\xi}{2}}F(t-\xi)\frac{I_1\left[c_0\sqrt{\xi^2-[x-2(m+1)\ell]^2/a_1^2}\right]}{\sqrt{\xi^2-[x-2(m+1)\ell]^2/a_1^2}}d\xi\right\},$$

$$\sigma_{xx}^{(2)}=-\sum_{m=1}^{m_2}\left(\frac{\rho_2 a_2-\rho_1 a_1}{\rho_2 a_2+\rho_1 a_1}\right)^m\left\{e^{-\frac{c_1(2m+1)\ell}{2}}F\left(t-\frac{(2m+1)\ell}{a_1}-\frac{x-\ell}{a_2}\right)-\right.$$

$$\left.-\frac{c_0(2m+1)\ell}{a_1}\int\limits_{\frac{(2m+1)\ell}{a_1}-\frac{x-\ell}{a_2}}^{t}e^{-\frac{c_1\xi}{2}}F(t-\xi)\frac{I_1\left[c_0\sqrt{\xi^2-(x+2m\ell)^2/a_1^2}\right]}{\sqrt{\xi^2-(x+2m\ell)^2/a_1^2}}d\xi\right\},$$

где $I_1(t)$ – модифицированная функция Бесселя 1-го порядка; верхние границы суммирования m_0, m_1, m_2 определены из условия, что аргумент функции $F(\tau)$ не может быть отрицательным:

$$m_0=\left\{\frac{a_1 t-x}{2\ell}\right\},\quad m_1=\left\{\frac{a_1 t+x-2\ell}{2\ell}\right\},\quad m_2=\left\{\frac{a_1}{a_2}\frac{a_2 t-x}{2\ell}\right\},\quad \{\xi\}\text{ – целая часть числа } \xi.$$

ВЫВОДЫ

1. Получено решение для напряжений в любом сечении стержня и в любой момент времени с учетом падающей волны, а также преломленных и отраженных волн. Анализ полученного решения показывает, что каждый раз, проходя через вязкоупругий элемент, импульс напряжений трансформируется: его длительность увеличивается, а амплитуда уменьшается.

2. Результаты работы могут быть использованы при подборе материала элементов, служащих для снижения ударных нагрузок на детали машин и на несущие конструкции зданий.

ЛИТЕРАТУРА

1. Вибрация и шум в текстильной и легкой промышленности / Под ред. Я.И. Коритысского. – М.: Легкая индустрия, 1974.

2. *Тамразян А.Г., Аветисян Л.А.* Расчет внецентренно-сжатых железобетонных элементов на кратковременную динамическую нагрузку // Строительство: наука и образование. – 2013, № 4. С. 2.

3. *Тамразян А.Г.* Динамическая устойчивость сжатого железобетонного элемента как вязкоупругого стержня // Вестник МГСУ. – 2011, № 1-2. С.193…196.

4. *Тамразян А.Г.* Ресурс живучести – основной критерий проектных решений высотных зданий // Жилищное строительство. – 2010, № 1. С. 15…18.

5. *Тамразян А.Г., Степанов А.Ю.* Колебания вязкоупругой реологической модели при действии мгновенного импульса // Изв. Орловского гос. технич. ун-та. Серия: Строительство и транспорт. – 2007, № 2-14. С. 181.

6. *Rybak J., Tamrazyan A.G.* Calibration of Rapid Impulse Compaction on The Basis of Vibration Velocity Control // International Multidisciplinary Scientific GeoConference Surveying Geology and Mining Ecology Management, SGEM 16, Science and Technologies in Geology, Exploration and Mining. Сер. "16th International Multidisciplinary Scientific GeoConference, SGEM 2016: Ecology, Economics, Education and Legislation - Conference Proceedings ". – 2016. P.715…722.

7. *Филиппов И.Г., Чебан В.Г.* Математическая теория колебаний упругих и вязкоупругих пластин и стержней. – Кишинев: ШТИИНЦА, 1988.

8. *Филиппов И.Г., Егорычев О.А.* Волновые процессы в линейных вязкоупругих средах. – М.: Машиностроение, 1983.

REFERENCES

1. Vibracija i shum v tekstil'noj i legkoj promyshlennosti / Pod red. Ja.I. Koritysskogo. – M.: Legkaja industrija, 1974.

2. Tamrazjan A.G., Avetisjan L.A. Raschet vnecentrenno-szhatyh zhelezobetonnyh jelementov na kratkovremennuju dinamicheskuju nagruzku // Stroitel'stvo: nauka i obrazovanie. – 2013, № 4. S. 2.

3. Tamrazjan A.G. Dinamicheskaja ustojchivost' szhatogo zhelezobetonnogo jelementa kak vjazkouprugogo sterzhnja // Vestnik MGSU. – 2011, № 1-2. S.193…196.

4. Tamrazjan A.G. Resurs zhivuchesti – osnovnoj kriterij proektnyh reshenij vysotnyh zdanij // Zhilishhnoe stroitel'stvo. – 2010, № 1. S. 15…18.

5. Tamrazjan A.G., Stepanov A.Ju. Kolebanija vjazkouprugoj reologicheskoj modeli pri dejstvii mgnovennogo impul'sa // Izv. Orlovskogo gos. teh-nich. un-ta. Serija: Stroitel'stvo i transport. – 2007, № 2-14. S.181.

6. Rybak J., Tamrazyan A.G. Calibration of Rapid Impulse Compaction on The Basis of Vibration Velocity

Control // International Multidisciplinary Scientific GeoConference Surveying Geology and Mining Ecology Management, SGEM 16, Science and Technologies in Geology, Exploration and Mining. Ser. "16th International Multidisciplinary Scientific GeoConference, SGEM 2016: Ecology, Economics, Education and Legislation - Conference Proceedings ". – 2016. P.715…722.

7. Filippov I.G., Cheban V.G. Matematicheskaja teorija kolebanij uprugih i vjazkouprugih plastin i sterzhnej. – Kishinev: ShTIINCA, 1988.

8. Filippov I.G., Egorychev O.A. Volnovye processy v linejnyh vjazkouprugih sredah. – M.: Mashinostroenie, 1983.

Рекомендована Ученым советом. Поступила 17.08.17.