

УДК 539.434:677.494

**МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ
ДЕФОРМАЦИОННО-РЕЛАКСАЦИОННЫХ ПРОЦЕССОВ
ПОЛИМЕРНЫХ МАТЕРИАЛОВ В УСЛОВИЯХ ПЕРЕМЕННОЙ ТЕМПЕРАТУРЫ***

**MATHEMATICAL MODELING
OF DEFORMATION-RELAXATION PROCESSES
POLYMERIC MATERIALS IN CONDITIONS OF VARIABLE TEMPERATURES**

*А.Г. МАКАРОВ, Н.В. ПЕРЕБОРОВА, М.А. ЕГОРОВА, И.М. ЕГОРОВ
A.G. MAKAROV, N.V. PEREBOROVA, M.A. EGOROVA, I.M. EGOROV*

(Санкт-Петербургский государственный университет промышленных технологий и дизайна,
Санкт-Петербургский государственный университет)
(Sankt-Petersburg State University of Industrial Technology and Design,
Sankt-Petersburg State University)

E-mail: makvin@mail.ru; Nina1332@yandex.ru; marika_@mail.ru; 9732137@mail.ru

В статье рассматриваются вопросы математического моделирования деформационных и релаксационных процессов полимерных материалов в условиях переменной температуры. Предлагается обобщение методик прогнозирования нелинейно-наследственной релаксации и нелинейно-наследственной ползучести на случай процессов, протекающих в условиях изменяющейся температуры путем введения в рассмотрение температурно-деформационно-временной и температурно-сило-временной аналогий.

The article deals with the mathematical modeling of deformation and relaxation processes of polymer materials in the conditions of variable temperature. A generalization of methods of forecasting of nonlinear relaxation of hereditary and nonlinear hereditary creep in case of the processes taking place in a changing temperature by introducing into consideration the temperature and strain-time and temperature-power-time analogies.

Ключевые слова: деформация, релаксация, полимерные материалы, прогнозирование, математическое моделирование, температурно-деформационно-временная аналогия, температурно-сило-временная аналогия.

Keywords: deformation, relaxation, polymeric materials, forecasting, simulation, temperature and strain-time analogy, the temperature - power - time analogy.

* Работа финансировалась в рамках выполнения государственного задания Министерства образования и науки РФ. Проект № 11.4696.2017/БЧ.

Имеющиеся методы математического моделирования и прогнозирования деформационно-релаксационных процессов полимерных материалов, как правило, разрабатываются для исследования указанных процессов при постоянной температуре [1]. Однако особенно востребованы методы математического моделирования и прогнозирования деформационно-релаксационных процессов полимерных материалов при переменной температуре, наиболее приближенные к реальным условиям эксплуатации указанных материалов. Недостаточное внимание исследователей к моделированию термовязкоупругих процессов полимерных материалов вызвано объективными трудностями, заключающимися, в первую очередь, в трудоемкости такого моделирования и в сложности учета влияния всех деформационных и релаксационных факторов в условиях переменной температуры [2]. Зачастую поставленная задача математического моделирования и прогнозирования деформационно-релаксационных свойств полимерных материалов при переменной температуре несколько упрощается, например, рассмотрением законов равномерного увеличения или уменьшения температуры во времени. Однако такое упрощение условий эксперимента не приводит к универсальности построенных математических моделей, так как, по сути, равномерное изменение температуры во времени подменяет временную аналогию температурной из-за того, что температурные зависимости жестко привязаны к временным и не являются произвольными [3].

Для описания же произвольной температурной зависимости во времени необходимо переходить от деформационно-временных аналогий к температурно-деформационно-временным аналогиям при моделировании релаксационных процессов и от сило-временных аналогий к температурно-сило-временным аналогиям при моделировании деформационных процессов. То есть сказанное означает переход от двумерного математиче-

ского моделирования деформационно-релаксационных процессов полимерных материалов к трехмерному путем неочевидных обобщений [4].

В настоящее время существует множество методик определения вязкоупругих характеристик нелинейной релаксации и ползучести при постоянной температуре. Широко применяется, например, методика [5], основанная на аппроксимации модуля релаксации E_{et} :

$$E_{et} = E_o - (E_o - E_\infty)\phi_{et} \quad (1)$$

и податливости D_{et} :

$$D_{et} = D_o + (D_\infty - D_o)\phi_{et} \quad (2)$$

различного рода нормированными функциями релаксации ϕ_{et} и ползучести ϕ_{ct} от логарифма приведенного времени (соответственно: $\ln \frac{t_1}{\tau_\epsilon}$ – для релаксации и $\ln \frac{t_1}{\tau_\sigma}$ – для ползучести, где τ_ϵ – время релаксации, τ_σ – время запаздывания).

Здесь t – время; ϵ_t – деформация; E_o – модуль упругости; E_∞ – модуль вязкоупругости; σ_t – напряжение; D_o – начальная податливость; D_∞ – предельно-равновесная податливость.

Наиболее часто в качестве нормированных функций ϕ_{et} и ϕ_{ct} используются [6] такие, как интеграл вероятности (ИВ):

$$\phi = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\frac{1}{a_n} \ln \frac{t}{\tau} - \frac{z^2}{2}} e^{-\frac{z^2}{2}} dz, \quad (3)$$

функция Кольрауша (ФК):

$$\phi = 1 - e^{-\left(\frac{t}{\tau}\right)^k}, \quad (4)$$

гиперболический тангенс (ГТ):

$$\phi = \frac{1}{1 + \left(\frac{t}{\tau}\right)^{-A}} = \frac{1}{1 + e^{-A \ln \frac{t}{\tau}}} = \frac{1}{2} \left(1 + \text{th} \left(\frac{A}{2} \ln \frac{t}{\tau} \right) \right), \quad (5)$$

нормированный арктангенс логарифма (НАЛ):

$$\phi = \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \arctg \left(\frac{1}{b_n} \ln \frac{t}{\tau} \right), \quad (6)$$

где a_n , k , A , b_n – структурные коэффициенты, характеризующие интенсивности процессов релаксации или ползучести.

Методики [7], основанные на деформационно-временной аналогии (для релаксации) и на сило-временной аналогии (для ползучести), предполагают возможность сдвига экспериментальных кривых "семейств" релаксации и ползучести, построенных в логарифмической шкале времени, до совмещения с обобщенными кривыми релаксации и ползучести. Величины таких сдвигов определяют функцию времен релаксации $f_{\varepsilon, \varepsilon} = \ln \frac{t_1}{\tau_\varepsilon}$, называемую также

деформационно-временной функцией, и функцию времен запаздывания $f_{\sigma, \sigma} = \ln \frac{t_1}{\tau_\sigma}$,

называемую также сило-временной функцией [8].

Таким образом, при выборе конкретной аппроксимирующей функции $\phi_{\varepsilon t}$ или $\phi_{\sigma t}$ задача по прогнозированию вязкоупругого процесса сводится фактически к определению четырех параметров для процесса релаксации (модуля упругости, модуля вязкоупругости, структурного коэффициента релаксации и деформационно-временной функции) и четырех параметров для процесса ползучести (начальной податливости, предельно-равновесной податливости, структурного коэффициента запаздывания и сило-временной функции).

Данные методики хорошо зарекомендовали себя при исследовании и прогнозировании различных нагруженных состояний синтетических нитей и других полимерных материалов в условиях постоянной температуры [9].

Имеют место аналогичные методики исследования процессов релаксации или ползучести при изменяющейся температуре.

Если "семейство" релаксации (полученное при определенном значении деформации ε_0 , но при разных температурах) или "семейство" ползучести (полученное при определенном значении σ_0 и при различных температурах) удастся посредством сдвигов на величины $f_{T, T} = \ln \frac{t_1}{\tau_T}$ совме-

стить с некоторой обобщенной кривой, то говорят, что имеет место температурно-временная аналогия, а функцию сдвигов называют температурно-временной функцией [10]. То есть исследование процессов, протекающих при изменяющейся температуре, но при постоянных значениях деформации или напряжения, сводится, при соответствующем выборе нормированной функции, к определению четырех параметров (двух асимптотических значений температур T_0 и T_∞ , характеризующих температурные границы исследуемого процесса, структурно-температурного коэффициента и температурно-временной функции) [11].

Имеющиеся методики позволяют прогнозировать нелинейно-наследственную релаксацию и нелинейно-наследственную ползучесть и в условиях изменяющейся температуры [12]. Однако данные методики либо предполагают нахождение вышеуказанных четырех параметров для каждого из исследуемых значений температуры, тем самым резко увеличивая число определяемых параметров, либо проводят исследование процессов при температуре, которая изменяется по заранее определенному сценарию (например, линейная зависимость температуры от времени, соответствующая равномерному нагреванию образца; зависимость температуры от времени по заданному закону в ходе остывания и т.п.), что фактически привязывает значения температуры к соответствующим значениям времени, подменяя две переменные (время и температуру) одной [13].

Изучая процессы нелинейно-наследственной релаксации и ползучести при различных значениях температуры и определяя соответствующим образом деформационно-временные и сило-временные функции для различных полимерных нитей (лав-

сан 114 текс – рис.1 и рис.2 соответственно; нитрон 33,3 текс; капрон 189 текс и др.), удалось заметить (особенно наглядно это видно при использовании в качестве $\phi_{ст}$ или $\phi_{ст}$ функции НАЛ – рис.1 и рис.2), что

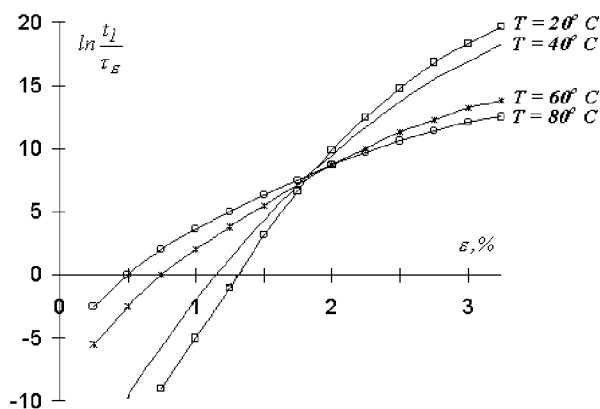


Рис. 1

Данный поворот графиков физически оправдан, так как при изменении температуры соответствующим образом изменяются значения времен релаксации при одинаковых значениях деформации и значения времен запаздывания при одинаковых значениях напряжения и осуществляется либо вокруг общей точки их пересечения (рис.1 – точка $\epsilon_0 \approx 1,8\%$, $f_{\epsilon_0} = \ln \frac{t_1}{\tau_{\epsilon_0}} \approx 7,9$), либо во-

круг точки, в которой пересекаются продолжения графиков (рис. 2 – точка $\sigma_0 \approx 282$ МПа, $f_{\sigma_0} = \ln \frac{t_1}{\tau_{\sigma_0}} \approx 4,8$). Указанные

точки пересечения графиков определяются численными методами.

Аналитически данный поворот графика можно описать посредством введения новой системы координат (соответственно

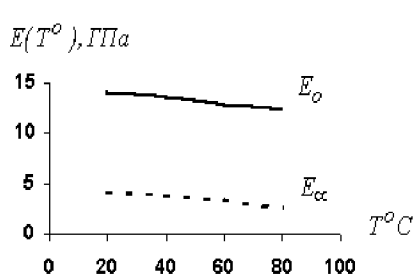


Рис. 3

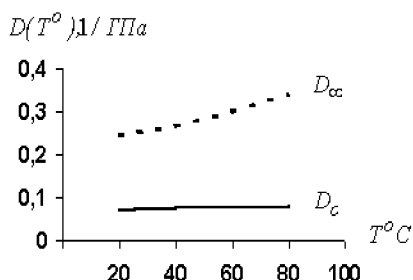


Рис. 4

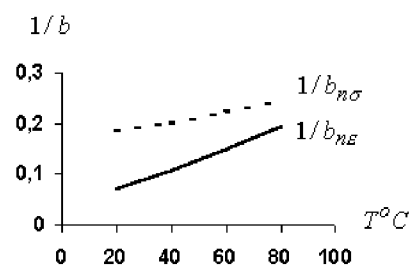


Рис. 5

графики приведенных функций при различных значениях температуры могут быть получены поворотом одного из них на некоторый угол, в первом приближении который можно считать линейно зависящим от значения температуры [14].

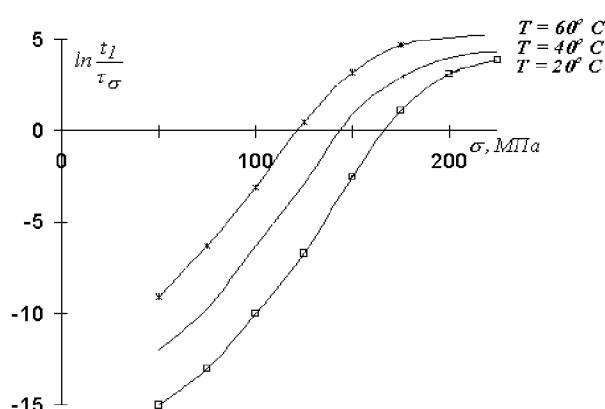


Рис. 2

$(\tilde{\epsilon}, \tilde{f}_{\epsilon})$ и $(\tilde{\sigma}, \tilde{f}_{\sigma})$, задаваемой формулами:

$$\begin{cases} \epsilon = \epsilon_0 + \tilde{\epsilon} \cos \alpha - \tilde{f}_{\epsilon} \sin \alpha, \\ f_{\epsilon, \epsilon} = f_{\epsilon_0, \epsilon_0} + \tilde{\epsilon} \sin \alpha + \tilde{f}_{\epsilon} \cos \alpha, \end{cases} \quad (7)$$

$$\begin{cases} \sigma = \sigma_0 + \tilde{\sigma} \cos \beta - \tilde{f}_{\sigma} \sin \beta, \\ f_{\sigma, \sigma} = f_{\sigma_0, \sigma_0} + \tilde{\sigma} \sin \beta + \tilde{f}_{\sigma} \cos \beta, \end{cases} \quad (8)$$

где α – угол поворота графика деформационно-временной функции, соответствующего температуре T_1 , к графику, соответствующему температуре T_2 ; β – угол поворота графика сило-временной функции, соответствующего температуре T_1 к графику, соответствующему температуре T_2 [15].

Аналогично, исследуя характер зависимости остальных параметров от температуры (модуля упругости, модуля вязкоупругости – рис. 3; начальной податливости, предельно-равновесной податливости – рис. 4; параметров интенсивности процессов релаксации и ползучести – рис. 5), можно в первом приближении считать эту зависимость линейной от температуры, что значительно упрощает процесс прогнозирования.

Предложенная методика прогнозирования вязкоупругих процессов полимерных нитей в условиях переменной температуры, опробованная на вышеперечисленных объектах, дала расчетные результаты, отличающиеся от экспериментальных на величину, не превышающую 20 %, что вполне технически допустимо.

Полученные предложенным способом релаксационные и деформационные характеристики являются параметрами математических моделей релаксации и ползучести. При этом следует заметить, что размерность параметров математических моделей релаксации и ползучести при переменной температуре увеличивается на единицу. Так, константы-параметры E_0 , E_∞ , D_0 , D_∞ , a_n , k , A , b_n становятся функциями, зависящими от времени, а параметры-функции $f_{\varepsilon_1\varepsilon} = \ln \frac{t_1}{\tau_\varepsilon}$, $f_{\sigma_1\sigma} = \ln \frac{t_1}{\tau_\sigma}$ становятся функциями двух переменных, зависящими не только от деформации и напряжения соответственно, но еще и от температуры [16].

ВЫВОДЫ

1. Предложенный метод определения вязкоупругих характеристик в условиях переменной температуры использует минимальное число возможных параметров и не зависит от закона изменения температуры.

2. Разработанные математические модели релаксации и ползучести полимерных материалов могут применяться при исследовании релаксационных и деформационных свойств полимерных материалов в условиях переменной температуры.

1. Макаров А.Г. Контроль параметров нелинейно-наследственных ядер релаксации и запаздывания синтетических нитей // Изв. вузов. Технология текстильной промышленности. – 2000, № 2. С.12...16.

2. Сталевич А.М., Макаров А.Г. Определение вязкоупругих характеристик на примере полиакрилонитрильной нити // Химические волокна. – 2001, № 6. С. 68...70.

3. Макаров А.Г. Определение аналитической взаимосвязи нормированных ядер релаксации и ползучести в линейной теории вязкоупругости текстильных материалов // Изв. вузов. Технология текстильной промышленности. – 2002, № 2. С. 13...17.

4. Демидов А.В., Макаров А.Г., Сталевич А.М. Методы компьютерного анализа вязкоупругости технических тканей // Изв. вузов. Технология текстильной промышленности. – 2006, № 3. С. 13...17.

5. Демидов А.В., Макаров А.Г., Сталевич А.М. Оптимизация выбора модели вязкоупругости синтетических нитей // Химические волокна. – 2006, № 6. С. 47...51.

6. Демидов А.В., Макаров А.Г., Сталевич А.М. Системный анализ вязкоупругости текстильных материалов // Изв. вузов. Технология текстильной промышленности. – 2007, № 3. С. 20...24.

7. Демидов А.В., Макаров А.Г., Сталевич А.М. Вариант прогнозирования нелинейно-наследственной вязкоупругости полимеров // Прикладная механика и техническая физика. – 2007. Т. 48, №5. С.147...157.

8. Макаров А.Г., Киселев С.В., Рыбачук С.В., Зурахов В.С. Критерии надежности прогнозирования вязкоупругости полимерных материалов // Изв. вузов. Технология легкой промышленности. – 2011, №1 (11). С. 56...60.

9. Макаров А.Г., Киселев С.В., Рыбачук С.В., Зурахов В.С. Взаимобратимость интегральных ядер релаксации и ползучести при линейности вязкоупругих свойств полимерных материалов // Вестник Санкт-Петербургского гос. ун-та технологии и дизайна. Серия 1. Естественные и технические науки. – 2011, № 1. С. 69...72.

10. Макаров А.Г., Егорова М.А., Зурахов В.С., Фомина А.В. Определение аналитической взаимосвязи нормированных ядер релаксации и запаздывания в линейной теории вязкоупругости полимерных материалов // Дизайн. Материалы. Технология. – 2012, № 3 (23). С. 48...50.

11. Макаров А.Г., Слуцкер Г.Я., Дроботун Н.В., Терушкина О.Б. Долговечность и ползучесть волокон ориентированного полипропилена // Изв. вузов. Технология легкой промышленности. – 2013, № 2 (20). С. 66...69.

12. Makarov A.G., Pereborova N.V., Wagner V.I., Rymkevich P.P., Gorshkov A.S. The basis of spectral-temporal analysis of relaxation and deformation properties of polymeric materials in textile and light industry // Изв. вузов. Технология легкой промышленности. – 2014, № 1 (23). С. 24...29.

13. Макаров А.Г., Слуцкер Г.Я., Переборова Н.В., Васильева В.В., Вагнер В.И. Кинетика релаксации напряжения и ползучести в ориентированных волокнах полипропилена // Изв. вузов. Технология легкой промышленности. – 2015, № 1 (27). С.101...105.

14. Макаров А.Г., Переборова Н.В., Вагнер В.И., Васильева Е.К. Математическое моделирование релаксации и ползучести полимерных нитей медицинского назначения // Химические волокна. – 2014, № 6. С. 37...41.

15. Макаров А.Г., Демидов А.В., Переборова Н.В., Егорова М.А. Моделирование и расчетное прогнозирование релаксационных и деформационных свойств полимерных парашютных строп // Изв. вузов. Технология текстильной промышленности. – 2015, № 6. С. 194...205.

16. Переборова Н.В. Разработка стратегической программы создания инжинирингового центра текстильной и легкой промышленности // Изв. вузов. Технология легкой промышленности. – 2015, № 3 (29). С. 35...42.

REFERENCES

1. Makarov A.G. Kontrol' parametrov nelinejno-nasledstvennykh jader relaksacii i zapazdyvanija sinteticheskikh nitej // Izv. vuzov. Tehnologija tekstil'noj promyshlennosti. – 2000, № 2. S.12...16.

2. Stalevich A.M., Makarov A.G. Opredelenie vjaskouprugih karakteristik na primere poliakrilonitril'noj niti // Himicheskie volokna. – 2001, № 6. S.68...70.

3. Makarov A.G. Opredelenie analiticheskoj vzaimosvjazi normirovannykh jader relaksacii i polzuchesti v linejnoj teorii vjaskouprugosti tekstil'nykh materialov // Izv. vuzov. Tehnologija tekstil'noj promyshlennosti. – 2002, № 2. S. 13...17.

4. Demidov A.V., Makarov A.G., Stalevich A.M. Metody komp'juternogo analiza vjaskouprugosti tehniceskikh tkanej // Izv. vuzov. Tehnologija tekstil'noj promyshlennosti. – 2006, № 3. S. 13...17.

5. Demidov A.V., Makarov A.G., Stalevich A.M. Optimizacija vybora modeli vjaskouprugosti sinteticheskikh nitej // Himicheskie volokna. – 2006, №6. S.47...51.

6. Demidov A.V., Makarov A.G., Stalevich A.M. Sistemnyj analiz vjaskouprugosti tekstil'nykh materialov // Izv. vuzov. Tehnologija tekstil'noj promyshlennosti. – 2007, № 3. S. 20...24.

7. Demidov A.V., Makarov A.G., Stalevich A.M. Variant prognozirovanija nelinejno-nasledstvennoj vjaskouprugosti polimerov // Prikladnaja mehanika i tehniceskaja fizika. – 2007. T. 48, №5. S.147...157.

8. Makarov A.G., Kiselev S.V., Rybachuk S.V., Zurahov V.S. Kriterii nadezhnosti prognozirovanija vjaskouprugosti polimernykh materialov // Izv. vuzov. Tehnologija legkoj promyshlennosti. – 2011, №1 (11). S. 56...60.

9. Makarov A.G., Kiselev S.V., Rybachuk S.V., Zurahov V.S. Vzaimoobratimost' integral'nykh jader relaksacii i polzuchesti pri linejnosti vjaskouprugih svojstv polimernykh materialov // Vestnik Sankt-Peterburgskogo gos. un-ta tehnologii i dizajna. Serija 1. Estestvennye i tehniceskije nauki. – 2011, № 1. S.69...72.

10. Makarov A.G., Egorova M.A., Zurahov V.S., Fomina A.V. Opredelenie analiticheskoj vzaimosvjazi normirovannykh jader relaksacii i zapazdyvanija v linejnoj teorii vjaskouprugosti polimernykh materialov // Dizajn. Materialy. Tehnologija. – 2012, № 3 (23). S.48...50.

11. Makarov A.G., Slucker G.Ja., Drobotun N.V., Terushkina O.B. Dolgovechnost' i polzuchest' volokon orientirovannogo polipropilena // Izv. vuzov. Tehnologija legkoj promyshlennosti. – 2013, № 2 (20). S.66...69.

12. Makarov A.G., Pereborova N.V., Wagner V.I., Rymkevich P.P., Gorshkov A.S. The basis of spectral-temporal analysis of relaxation and deformation properties of polymeric materials in textile and light industry // Izv. vuzov. Tehnologija legkoj promyshlennosti. – 2014, № 1 (23). S. 24...29.

13. Makarov A.G., Slucker G.Ja., Pereborova N.V., Vasil'eva V.V., Vagner V.I. Kinetika relaksacii napryazhenija i polzuchesti v orientirovannykh voloknah polipropilena // Izv. vuzov. Tehnologija legkoj promyshlennosti. – 2015, № 1 (27). S.101...105.

14. Makarov A.G., Pereborova N.V., Vagner V.I., Vasil'eva E.K. Matematicheskoe modelirovanie relaksacii i polzuchesti polimernykh nitej medicinskogo naznachenija // Himicheskie volokna. – 2014, № 6. S.37...41.

15. Makarov A.G., Demidov A.V., Pereborova N.V., Egorova M.A. Modelirovanie i raschetnoe prognozirovanie relaksacionnykh i deformatsionnykh svojstv polimernykh parashjutnykh strop // Izv. vuzov. Tehnologija tekstil'noj promyshlennosti. – 2015, № 6. S.194...205.

16. Pereborova N.V. Razrabotka strategicheskoj programmy sozdaniya inzhiniringovogo centra tekstil'noj i legkoj promyshlennosti // Izv. vuzov. Tehnologija legkoj promyshlennosti. – 2015, № 3 (29). S. 35...42.

Рекомендована кафедрой интеллектуальных систем и защиты информации СПбГУПТД. Поступила 01.09.16.