

УДК 539.3

**ИССЛЕДОВАНИЕ НАПРЯЖЕННО-ДЕФОРМИРОВАННОГО
СОСТОЯНИЯ ЛЕНТЫ,
НАМОТАННОЙ НА ПРЯМОЙ КРУГОВОЙ ЦИЛИНДР
С СОБЛЮДЕНИЕМ ВИНТОВОЙ СИММЕТРИИ**

**ANALYSIS OF THE STRAIN-STRESS STATE
OF THE SCREW-SYMMETRIC TAPE
WOUND ON A CIRCULAR CYLINDER**

Е.В. ПОЛЯКОВА, В.А. ЛУТОВ, В.Е. РОМАНОВ, А.М. ЧЕЛЫШЕВ, Е.М. КРАЙНОВ
E.V. POLYAKOVA, V.A. LUTOV, V.E. ROMANOV, A.M. CHELYSHEV, E.M. KRAINOV

(Санкт-Петербургский государственный университет промышленных технологий и дизайна,
Ивановский государственный политехнический университет)
(St. Petersburg State University of Industrial Technologies and Design,
Ivanovo State Polytechnical University)
E-mail: ekpol@mail.ru; romanov@stud.ru

Предлагаемая работа является заключительной в серии исследований группы авторов, посвященных определению напряженно-деформированного состояния ленты, намотанной на гладкую цилиндрическую поверхность, а также давления ленты на армируемую поверхность. Рассмотрен частный случай наличия винтовой симметрии ленты, охватывающей прямой круговой цилиндр, при произвольном значении угла между нитями основы и утка. Приведены результаты численного анализа.

This paper is final in the series of studies performed by the group of authors concerning the strain-stress state of the tape wound on the smooth cylindric surface, as well as the tape pressure on the reinforced surface. The special case of the screw-symmetric tape wound on the circular cylinder subject to an arbitrary angle between weft and warp threads is considered. The numerical analysis is performed.

Ключевые слова: мягкие оболочки, уравнения равновесия, напряжение, деформация, дифференциальные уравнения в частных производных.

Keywords: soft shells, equilibrium equations, stress, deformation, partial differential equations.

Предлагаемая работа является заключительной в серии исследований напряженно-деформированного состояния ленты, намотанной на гладкую цилиндрическую поверхность, и ее давления на армируемую поверхность, теоретические основы которого были заложены членами авторского коллектива в [1...5].

Полученные в [4] результаты позволяют проводить анализ напряженно-деформированного состояния лент сетчатых структур с достаточно высокой частотой переплетения и характера их взаимодействия с охватываемыми твердыми телами, ограниченными цилиндрическими поверхностями, на основе соответствующих систем дифференциальных уравнений в частных производных. Поскольку реализуемые в различных отраслях промышленности технологические процессы прерывного и непрерывного наматывания лент обычно предполагают наличие винтовой симметрии лент, армирующих прямые круговые цилиндры, представляется целесообразным провести детальное исследование данного частного случая, что было реализовано в [5] при условии сохранения ортогональности нитей основы и утка. В настоящем исследовании угол между образующими ленту нитями считается произвольным.

С теоретической точки зрения рассмотрение частного случая наличия винтовой симметрии ленты, охватывающей прямой круговой цилиндр, означает введение упрощающих допущений, позволяющих свести задачу к интегрированию обыкновенных дифференциальных уравнений и получить их точные решения. С точки зрения практического применения полученных результатов исследования возможность получения точных решений систем дифференциальных уравнений означает возможность использования точных (в рамках допущений принятых моделей) расчетных формул для определения давлений лент на поверхности армируемых прямых круговых цилиндров в зависимости от радиуса цилиндра, взаимного расположения и упругих свойств нитей основы и утка, кратностей их предварительных удлинений, а также угла намотки

(подъема) ленты. Наличие расчетных зависимостей давления лент на поверхности от параметров технологических процессов намотки позволяет решить вопрос об оптимальном подборе этих параметров при создании изделий, эксплуатируемых в условиях различных по величине силовых воздействий.

Наличие винтовой симметрии ленты, намотанной на прямой круговой цилиндр, при произвольном угле между нитями основы и утка.

Предлагаемый в данном разделе теоретический анализ базируется на результатах, полученных авторами в первой части работы при соответствующих допущениях, принятых при построении математической модели [4].

Как и в [5], ограничимся далее рассмотрением наиболее типичного случая, когда труба является круговым цилиндром радиусом R и напряженно-деформированное состояние ленты обладает винтовой симметрией, что математически выражается в том, что производные по координате s от характеристик ее состояния λ_1 , λ_2 , σ_{11} и σ_{22} равны нулю. Нити основы и утка располагаются вдоль геодезических линий и равномерно растянуты, имея постоянные кратности удлинений $\hat{\lambda}_1$ и $\hat{\lambda}_2$ соответственно.

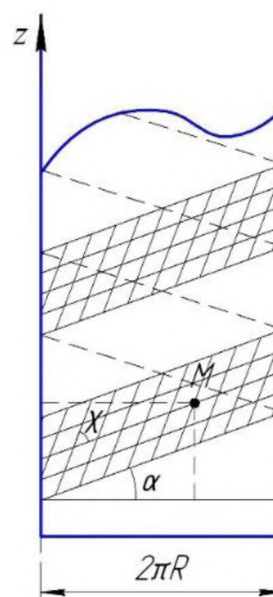


Рис. 1

Очевидно, что развертка ленты на плоскость представляет собой полосу, составляющую с направляющими трубы угол, равный углу подъема ленты α (рис. 1). Рассмотрим случай, когда при принятых допущениях происходит скашивание ячеек, образуемых нитями основы и утка, так что

угол между указанными нитями равен χ (рис. 1), где $0 < \chi < \pi$.

Легко видеть, что с точностью до поворота вокруг оси симметрии трубы и сдвига вдоль нее функции $\varphi(s, h)$ и $z(s, h)$ могут быть записаны в виде:

$$\varphi(s, h) = \hat{\lambda}_1 \frac{s}{R} \cos \alpha + \hat{\lambda}_2 \frac{h}{R} \cos(\alpha + \chi) + \text{const}, \quad (1)$$

$$z(s, h) = \hat{\lambda}_1 s \sin \alpha + \hat{\lambda}_2 h \sin(\alpha + \chi) + \text{const}.$$

С учетом равенств (1) уравнения (30)...(32) из работы [4] можно переписать в виде:

$$(q_1 + q_2 \cos \chi) \hat{\lambda}_1 \hat{\lambda}_2 \sin \chi = 0, \quad (2)$$

$$(q_1 \cos \chi + q_2) \hat{\lambda}_1 \hat{\lambda}_2 \sin \chi = 0, \quad (3)$$

$$\frac{1}{R} \left(k_1 (\hat{\lambda}_1 - 1) \hat{\lambda}_1 \cos^2 \alpha + k_2 (\hat{\lambda}_2 - 1) \hat{\lambda}_2 \cos^2 (\alpha + \chi) \right) - q_n \hat{\lambda}_1 \hat{\lambda}_2 \sin \chi = 0. \quad (4)$$

При условии $0 < \chi < \pi$ система уравнений (2)...(3) имеет единственное решение:

$$q_1 = 0, \quad q_2 = 0, \quad (5)$$

а уравнение (4) дает:

$$q_n = \frac{1}{R \hat{\lambda}_1 \hat{\lambda}_2 \sin \chi} \left(k_1 \hat{\lambda}_1 (\hat{\lambda}_1 - 1) \cos^2 \alpha + k_2 \hat{\lambda}_2 (\hat{\lambda}_2 - 1) \cos^2 (\alpha + \chi) \right). \quad (6)$$

Для анализа выражения нормального давления (6) найдем частные производные

q_n по параметрам $k_1, k_2, \hat{\lambda}_1, \hat{\lambda}_2, \alpha$ и χ :

$$\frac{\partial q_n}{\partial k_1} = \frac{(\hat{\lambda}_1 - 1) \cos^2 \alpha}{R \hat{\lambda}_2 \sin \chi}, \quad \frac{\partial q_n}{\partial k_2} = \frac{(\hat{\lambda}_2 - 1) \cos^2 (\alpha + \chi)}{R \hat{\lambda}_1 \sin \chi}, \quad (7)$$

$$\frac{\partial q_n}{\partial \hat{\lambda}_1} = \frac{1}{R \hat{\lambda}_2 \hat{\lambda}_1^2 \sin \chi} \left(k_1 \hat{\lambda}_1^2 \cos^2 \alpha - k_2 \hat{\lambda}_2 (\hat{\lambda}_2 - 1) \cos^2 (\alpha + \chi) \right), \quad (8)$$

$$\frac{\partial q_n}{\partial \hat{\lambda}_2} = \frac{1}{R \hat{\lambda}_1 \hat{\lambda}_2^2 \sin \chi} \left(-k_1 \hat{\lambda}_1 (\hat{\lambda}_1 - 1) \cos^2 \alpha + k_2 \hat{\lambda}_2^2 \cos^2 (\alpha + \chi) \right), \quad (9)$$

$$\frac{\partial q_n}{\partial \alpha} = -\frac{1}{R \hat{\lambda}_1 \hat{\lambda}_2 \sin \chi} \left(k_1 \hat{\lambda}_1 (\hat{\lambda}_1 - 1) \sin 2\alpha + k_2 \hat{\lambda}_2 (\hat{\lambda}_2 - 1) \sin 2(\alpha + \chi) \right), \quad (10)$$

$$\frac{\partial q_n}{\partial \chi} = -\frac{1}{R\hat{\lambda}_1\hat{\lambda}_2 \sin \chi} \left(\operatorname{ctg} \chi \left(k_1 \hat{\lambda}_1 (\hat{\lambda}_1 - 1) \cos^2 \alpha + k_2 \hat{\lambda}_2 (\hat{\lambda}_2 - 1) \cos^2 (\alpha + \chi) \right) + k_2 \hat{\lambda}_2 (\hat{\lambda}_2 - 1) \sin 2(\alpha + \chi) \right). \quad (11)$$

Поскольку кратности удлинений нитей основы и утка удовлетворяют условиям $\hat{\lambda}_1 \geq 1$ и $\hat{\lambda}_2 \geq 1$, а угол между координатными линиями $0 < \chi < \pi$, то на основании равенств (7), очевидно, будем иметь:

$$\frac{\partial q_n}{\partial k_1} \geq 0, \quad \frac{\partial q_n}{\partial k_2} \geq 0. \quad (12)$$

$$\frac{\partial q_n}{\partial k_1} > 0, \quad \frac{\partial q_n}{\partial k_2} = 0, \quad \frac{\partial q_n}{\partial \hat{\lambda}_1} = \frac{k_1 \cos^2 \alpha}{R \sin \chi} > 0, \quad \frac{\partial q_n}{\partial \alpha} = -\frac{k_1 \hat{\lambda}_1 (\hat{\lambda}_1 - 1) \sin 2\alpha}{R \hat{\lambda}_1 \sin \chi} < 0, \quad (13)$$

откуда, как и ранее, получим, что давление ленты на трубу является возрастающей функцией параметра k_1 , характеризующего упругие свойства нитей основы, кратности удлинения $\hat{\lambda}_1$ этих нитей и убывающей функцией угла подъема α .

Особый интерес представляет исследование характера зависимости нормального

$$q_n = \frac{k_1 \hat{\lambda}_1 (\hat{\lambda}_1 - 1) \cos^2 \alpha}{R \hat{\lambda}_1 \sin \chi}, \quad \frac{\partial q_n}{\partial \chi} = -\frac{k_1 (\hat{\lambda}_1 - 1) \cos^2 \alpha \cos \chi}{R \hat{\lambda}_1 \sin^2 \chi}. \quad (14)$$

Очевидно, что $q_n(\pi - \chi) = q_n(\chi)$, а знак

$$\frac{\partial q_n}{\partial \chi} < 0 \text{ при } 0 < \chi < \frac{\pi}{2}, \quad \frac{\partial q_n}{\partial \chi} = 0 \text{ при } \chi = \frac{\pi}{2}, \quad \frac{\partial q_n}{\partial \chi} > 0 \text{ при } \frac{\pi}{2} < \chi < \pi. \quad (15)$$

Таким образом, нормальное давление ленты на трубу имеет минимум при $\chi = \frac{\pi}{2}$.

На рис. 2 приведены графики типичных зависимостей $q_n R / k_1$ от угла χ между нитями основы и утка при трех различных значениях угла подъема α в случае $\hat{\lambda}_2 = 1$.

Как и при исследовании случая сохранения ортогональности нитей основы и утка [5], начнем с рассмотрения простейшей ситуации, когда при намотке ленты на круговой цилиндр с углом подъема α , $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$, растяжению подвергаются только нити основы, то есть $\hat{\lambda}_1 > 1$, $\hat{\lambda}_2 = 1$. При сделанных предположениях равенства (7), (8) и (10) дают:

давления ленты на трубу от угла χ между нитями основы и утка, $0 < \chi < \pi$.

В случае $\hat{\lambda}_1 > 1$, $\hat{\lambda}_2 = 1$ выражения (6) и (11) нормального давления и его частной производной $\frac{\partial q_n}{\partial \chi}$ упрощаются и принимают вид:

производной в (14) определяется знаком $\cos \chi$:

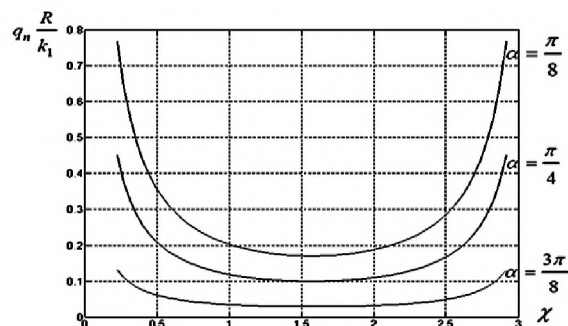


Рис. 2

Перейдем далее к рассмотрению случая $\hat{\lambda}_1 > 1$, $\hat{\lambda}_2 > 1$, когда растяжению подвергаются как нити основы, так и уточные нити, и проанализируем характер зависимости нормального давления ленты на трубу от угла χ .

Введем следующие обозначения:

$$q_n(\alpha, \chi, a, b, R) = \frac{1}{R \sin \chi} (a \cos^2 \alpha + b \cos^2(\alpha + \chi)), \quad (17)$$

$$\frac{\partial q_n}{\partial \chi} = -\frac{1}{R \sin \chi} (\operatorname{ctg} \chi (a \cos^2 \alpha + b \cos^2(\alpha + \chi)) + b \sin 2(\alpha + \chi)). \quad (18)$$

Для определения знаков частной производной (18) при различных значениях параметров задачи и принятых выше условиях $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$, $0 < \chi < \pi$ рассмотрим последовательно следующие случаи:

$$1) 0 < \chi \leq \frac{\pi}{2} - \alpha; \quad 2) \frac{\pi}{2} - \alpha < \chi \leq \frac{\pi}{2};$$

$$3) \frac{\pi}{2} < \chi \leq \pi - \alpha; \quad 4) \pi - \alpha < \chi < \pi.$$

Очевидно, что в первом случае $\operatorname{ctg} \chi > 0$, $\sin 2(\alpha + \chi) \geq 0$ и $\frac{\partial q_n}{\partial \chi} < 0$, в третьем $\operatorname{ctg} \chi < 0$, $\sin 2(\alpha + \chi) \leq 0$ и $\frac{\partial q_n}{\partial \chi} > 0$. Во втором случае $\operatorname{ctg} \chi > 0$, $\sin 2(\alpha + \chi) < 0$, в четвертом $\operatorname{ctg} \chi < 0$, $\sin 2(\alpha + \chi) > 0$, и, следовательно, определение знаков частной производной $\frac{\partial q_n}{\partial \chi}$ в этих случаях требует дополнительного исследования.

Заметим, что в условиях последнего, четвертого, случая:

$$q_n(\alpha, \chi, a, b, R) = q_n(\alpha_1, \chi_1, b, a, R), \quad (19)$$

где $\alpha_1 = \alpha + \chi - \pi$, $\chi_1 = \pi - \chi$, причем $0 < \alpha_1 < \frac{\pi}{2}$, $0 < \alpha_1 + \chi_1 < \frac{\pi}{2}$. Таким образом, четвертый случай намотки ленты в соответствии с равенством (19) может рассматри-

$$a = k_1 \frac{\hat{\lambda}_1 - 1}{\hat{\lambda}_2}, \quad b = k_2 \frac{\hat{\lambda}_2 - 1}{\hat{\lambda}_1}, \quad (16)$$

использование которых позволяет переписать выражения (6) и (11) нормального давления и его производной по углу χ в более компактных формах

ваться как первый случай намотки ленты, полученной из первоначальной замены нитей утка на нити основы и наоборот.

На основании анализа выражения (18) заключаем, что на промежутке $\frac{\pi}{2} - \alpha < \chi \leq \frac{\pi}{2}$ частная производная $\frac{\partial q_n}{\partial \chi}$ по

крайней мере один раз меняет знак с минуса на плюс, и, следовательно, на этом промежутке нормальное давление имеет по крайней мере один локальный минимум. Графики частной производной $\frac{\partial q_n}{\partial \chi}$ при неко-

торых значениях угла подъема α приведены на рис. 3 (зависимости частной производной $\frac{\partial q_n}{\partial \chi}$ от угла χ между нитями основы и утка при различных значениях угла подъема α в случае $\hat{\lambda}_2 > 1$).

Как следует из анализа смен знака производных $\frac{\partial q_n}{\partial \chi}$ при выбранных значениях угла подъема α (рис. 3), нормальное давление ленты на трубу в этих частных случаях имеет только один локальный минимум на

промежутке $\frac{\pi}{2} - \alpha < \chi \leq \frac{\pi}{2}$ (рис. 4 – зависимости нормального давления ленты на трубу от угла χ между нитями основы и утка при различных значениях угла подъема α в случае $\hat{\lambda}_2 > 1$).

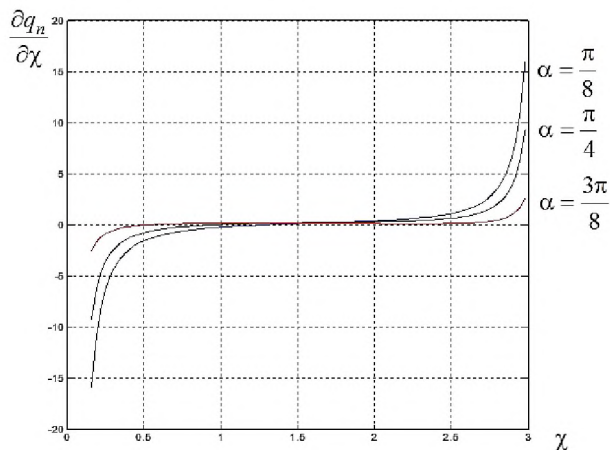


Рис. 3

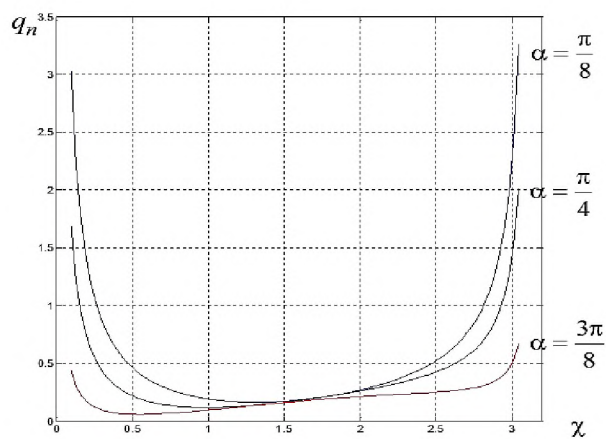


Рис. 4

Анализ рис. 4 позволяет сделать предположение о том, что при увеличении угла α подъема ленты уменьшается значение χ_{\min} , в котором нормальное давление достигает минимального значения на промежутке $\frac{\pi}{2} - \alpha < \chi \leq \frac{\pi}{2}$. Для проверки достоверности этого предположения и степени его общности воспользуемся теоремой о неявной

функции, предварительно заметив, что экстремумы $\chi_{\text{extr}}(\alpha)$ функции $q_n(\chi)$ определяются неявно из уравнения:

$$\text{ctg} \chi (a \cos^2 \alpha + b \cos^2 (\alpha + \chi)) + b \sin 2(\alpha + \chi) = 0. \quad (20)$$

Теорема о неявной функции позволяет вычислить производную:

$$\frac{d\chi_{\text{extr}}(\alpha)}{d\alpha} = -1 + \frac{a \cos^2 \chi_{\text{extr}} \sin 2\alpha + b \sin 2(\alpha + \chi_{\text{extr}})}{b (\sin^2 \chi_{\text{extr}} \sin 2(\alpha + \chi_{\text{extr}}) + \cos 2(\alpha + \chi_{\text{extr}}) \sin 2\chi_{\text{extr}})}. \quad (21)$$

Результаты численного анализа знака производной $\frac{d\chi_{\text{extr}}(\alpha)}{d\alpha}$, определяемой выражением (21), подтверждают справедливость сформулированного выше предположения об уменьшении значения χ_{\min} , в котором нормальное давление достигает минимального значения на промежутке $\frac{\pi}{2} - \alpha < \chi \leq \frac{\pi}{2}$, при увеличении угла α подъема ленты. Численное исследование поведения производной $\frac{\partial q_n}{\partial \chi}$ показывает, что при достаточно больших значениях угла α подъема ленты, близких к $\frac{\pi}{2}$, нормальное давление имеет на промежутке $0 < \chi < \pi$ два локальных минимума.

На рис. 5 показан график зависимости нормального давления ленты на трубу от угла α подъема ленты и угла χ между нитями основы и утка в случае $\hat{\lambda} > 1$. Для бо-

лее наглядной иллюстрации неоднозначного характера этой зависимости приведем отдельно график части поверхности, соответствующий значениям угла подъема ленты, близких к $\frac{\pi}{2}$ (рис. 6 – зависимость нормального давления ленты на трубу от угла α подъема ленты и угла χ между нитями основы и утка в случае $\hat{\lambda}_2 > 1$ при значениях α , близких к $\frac{\pi}{2}$).

Визуальный анализ поверхностей, представленных на рис. 5 и 6, подтверждает возможность наличия либо одного, либо двух локальных минимумов нормального давления на промежутке $0 < \chi < \pi$ в зависимости от значения угла α подъема ленты, о чем уже говорилось выше при анализе поведения частной производной $\frac{\partial q_n}{\partial \chi}$. Выявленная неоднозначность поведения нормального давления связана с проявлениями нелинейных эффектов.

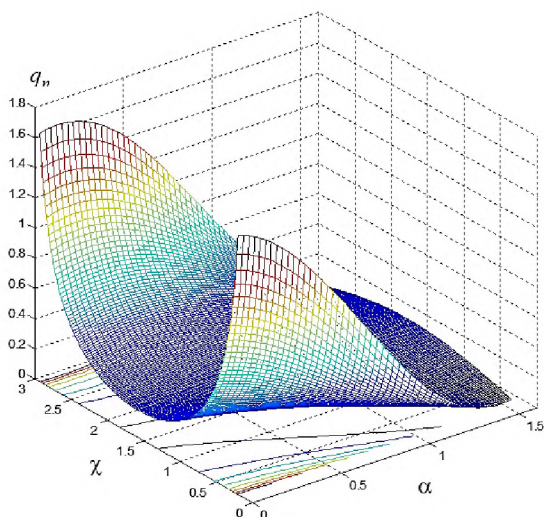


Рис. 5

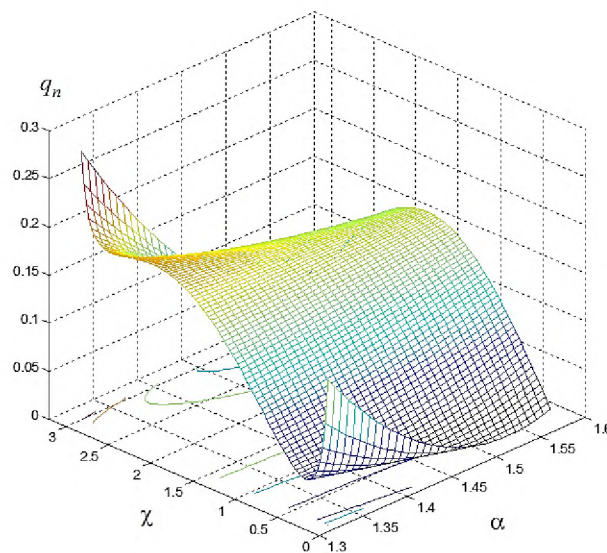


Рис. 6

В заключение следует отметить, что практическая точность получаемых результатов будет определяться тем, насколько точно информация о технологии укладки ленты на трубу позволит определить геометрию расположения уточных нитей. Дальнейшие обобщения результатов исследования могут быть связаны с применением метода возмущений, например, в направлении учета релаксационных свойств лент, учета неточностей в удовлетворении принятых соотношений, а также при изучении лент, имеющих другие структуры переплетения нитей.

ЛИТЕРАТУРА

1. Чайкин В.А., Полякова Е.В. Основы механики мягких оболочек и тканей. – Санкт-Петербург, 2004.
2. Полякова Е.В., Чайкин В.А. Прикладные задачи механики мягких оболочек и тканей. – СПб.: СПГУТД, 2006.
3. Майоров А.М., Лутов В.А., Чайкин В.А., Полякова Е.В. Напряженно-деформированное состояние тканой ленты, используемой при производстве композитной трубы посредством наматывания // Дизайн. Материалы. Технология. – 2010, №3(14). С.48...51.
4. Лутов В.А., Полякова Е.В., Романов В.Е., Челышев А.М., Крайнов Е.М. Исследование напряженно-деформированного состояния ленты, наматанной на цилиндрическую поверхность // Изв. вузов. Технология текстильной промышленности. – 2016, № 6. С. 54...60.

5. Полякова Е.В., Лутов В.А., Романов В.Е., Челышев А.М., Крайнов Е.М. Исследование напряженно-деформированного состояния ленты, наматанной на прямой круговой цилиндр с сохранением ортогональности нитей основы и утка // Изв. вузов. Технология текстильной промышленности. – 2017, № 1. С. 123...128.

REFERENCES

1. Chajkin V.A., Poljakova E.V. Osnovy mehaniki m'jagkih obolochek i tkaney. – Sankt-Peterburg, 2004.
2. Poljakova E.V., Chajkin V.A. Prikladnye zadachi mehaniki m'jagkih obolochek i tkaney. – SPb.: SPGUTD, 2006.
3. Majorov A.M., Lutov V.A., Chajkin V.A., Poljakova E.V. Naprjazhenno-deformirovannoe sostojanie tkanoj lenty, ispol'zuej pri proizvodstve kompozitnoj truby posredstvom namatyvanija // Dizajn. Materialy. Tehnologija. – 2010, №3(14). S.48...51.
4. Lutov V.A., Poljakova E.V., Romanov V.E., Chelyshev A.M., Krajnov E.M. Issledovanie naprjazhenno-deformirovannogo sostojanija lenty, namotannoj na cilindricheskiju poverhnost' // Izv. vuzov. Tehnologija tekstil'noj promyshlennosti. – 2016, № 6. S. 54...60.
5. Poljakova E.V., Lutov V.A., Romanov V.E., Chelyshev A.M., Krajnov E.M. Issledovanie naprjazhenno-deformirovannogo sostojanija lenty, namotannoj na prjamoj krugovoj cilindr s sohraneniem ortogonal'nosti nitej osnovy i utka // Izv. vuzov. Tehnologija tekstil'noj promyshlennosti. – 2017, № 1. S.123...128.

Рекомендована кафедрой машиноведения СПГУПТД. Поступила 25.09.17.