УДК 624.073.82.001.63

ОПТИМАЛЬНОЕ ПРОЕКТИРОВАНИЕ БАЛКИ-СТЕНКИ ИЗ ДИСПЕРСНО-АРМИРОВАННОГО МАТЕРИАЛА

OPTIMUM DESIGN OF THE BEAMS-WALLS FROM DISPERSANIZED REINFORCED MATERIAL

С.Ю. ГРИДНЕВ, И.Г. ОВЧИННИКОВ
S.YU. GRIDNEV, I.G. OVCHINNIKOV

(Воронежский государственный технический университет)
(Voronezh State Technical University)
E-mail: rector@vortu.ru

На примере балки-стенки, изготовленной из сталефибробетона, найдено такое распределение плотности армирования, которое обеспечивает минимальный расход арматуры при выполнении прочностных ограничений при заданных условиях нагружения. Разработан метод решения задачи оптимального проектирования конструкций путем управления законом распределения неоднородности механических свойств по объему. Решена задача нахождения оптимального распределения упругих свойств неоднородного изотропного материала, который является моделью композитного материала с хаотическим армированием. На первом этапе определено напряженное состояние конструкции с известными свойствами материала. На втором этапе на основе первого этапа найдено распределение плотности армирования, обеспечивающее минимальный расход арматуры. Показано, что задача является многоэкстремальной и указанным способом можно найти лишь локальный минимум функции цели. В ходе оптимизации активными являлись ограничения по прочности на разрыв и по допустимым значениям плотностей армирования.

On the example of a beam-wall made of steel-fiber-concrete, a reinforcement density distribution is found that ensures a minimum flow of reinforcement when strength constraints are performed under predetermined loading conditions. A method is developed for solving the problem of optimal design of structures by controlling the law of distribution of the inhomogeneity of mechanical properties by volume. The problem of finding the optimal distribution of the elastic properties of an inhomogeneous isotropic material, which is a model of a composite material with chaotic reinforcement, is solved. At the first stage, the stress state of a structure with known material properties is determined. In the second stage, based on the first

stage, a distribution of the reinforcement density was found, which ensures the minimum consumption of reinforcement. It is shown that the problem is multiextremal and this method can only find the local minimum of the goal function. In the course of optimization, restrictions on the tensile strength and the permissible values of the reinforcement densities were active.

Ключевые слова: балка-стенка, оптимальное проектирование, дисперсно-армированный материал, оптимальное распределение, хаотическое армирование, локальный минимум функции цели.

Keywords: beam-wall, optimal design, dispersion-reinforced material, optimal distribution, chaotic reinforcement, local minimum of the goal function.

Оптимальное проектирование конструкций часто, и не без основания, отождествляется с процессом выбора наилучшей формы конструкции. Большинство искусственных строительных материалов на основе металла, бетона, пластмасс превращаются в конструкционные элементы после затвердевания из жидкой фазы. Это обусловливает, во-первых, сравнительную однородность механических свойств элемента, по крайней мере на макроскопическом уровне, во-вторых, техническую возможность придания элементу достаточно произвольной формы. Неудивительно, что большая часть исследований по оптимальному проектированию инженерных сооружений [1...3] посвящена именно поиску оптимальной формы однородных стержней, балок, пластин и оболочек.

Заметим, однако, что на практике форма конструкционного элемента бывает в значительной степени ограничена как необходимостью выполнения собственных полезных функций, так и условиями сочленения с другими элементами в составной конструкции. Дополнительные ограничения на формообразование появляются при изготовлении элементов из существенно неоднородных материалов, например, направленных композитов. С другой стороны, технология изготовления современных композиционных материалов допускает вариацию их свойств в достаточно широких пределах [4], [5]. При реальном проектировании в ряде случаев решается обратная задача, когда при неизменной заданной форме конструкции необходимо выполнить оптимизацию законов распределения свойств материала.

Развитие методов поиска оптимального распределения свойств материала представляется важным еще по одной причине. Не секрет, что под действием нагрузок и других внешних воздействий, в частности, агрессивных сред, свойства материала конструкций изменяются с течением времени [6…8]. Особенно существенными для функционирования являются изменения свойств у тонкостенных конструкций, контактирующих с агрессивными средами, каковыми являются трубопроводы, резервуары для хранения нефтепродуктов, химические реакторы, корпуса судов и многие другие. Однако до недавнего времени при решении задач оптимального проектирования этот факт игнорировался – по сути, получаемые проекты могли быть оптимальными даже теоретически лишь на начальный момент времени. Вплоть до настоящего времени учет агрессивных воздействий при оптимальном проектировании проводится в небольшом количестве работ [9…11]. Малое число подобных работ можно объяснить как возросшими вычислительными трудностями, связанными с учетом времени, так и проблемами с самой постановкой задач, например, отсутствием универсальных критериев качества. С этой точки зрения развитие подходов к поиску оптимальных свойств материала конструкции на момент изготовления принесло бы немалую пользу.

Еще большее значение развитие указанных подходов приобретает с появлением материалов, свойствами которых можно управлять после изготовления, в период эксплуатации. В качестве примера такого материала укажем бетон с добавками последующего действия, которые после активизации восстанавливают водонепроницаемость бетона, состарившегося за несколько лет эксплуатации [12]. Проведенный анализ состояния научных исследований по рассматриваемой тематике показывает актуальность постановки и разработки методов решения задач по оптимальному проектированию конструкций путем управления законом распределения неоднородности механических свойств по объему конструкции.

В этом случае улучшить качество проектируемого элемента можно путем варьирования характеристиками материала, из которого он изготовлен. Современные технологии позволяют изготавливать композиционные материалы с самыми разнообразными пространственными распределениями таких механических свойств, как плотность, предел прочности, величины модулей упругости, ориентация осей анизотропии и т.д.

Ниже рассматривается задача нахождения оптимального распределения упругих свойств неоднородного изотропного материала, который является моделью композитного материала с хаотическим армированием.

В первой части работы описан подход к решению прямой задачи, то есть задачи определения напряженного состояния конструкции с известными свойствами материала.

На основе методики решения прямой задачи строится процедура оптимального проектирования, описанная во второй части.

Прямая задача. Рассмотрим конструкцию в виде квадратной в плане балки-стенки, показанную на рис. 1.

На верхнюю грань балки действует равномерное нормальное усилие интенсивности P, которое уравновешивается равномерными касательными усилиями P/2 на боковых гранях. Такой вариант граничных условий выбран во избежание особенностей напряженного состояния в угловых точках контура, которые возникают, например, при размещении вблизи последних точечных опор.

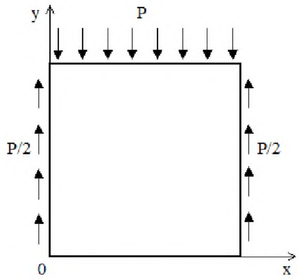

Рис. 1

Материал балки представляется матрицей с известными параметрами Ламе λ_m, μ_m, хаотично армированной короткими высокопрочными волокнами с модулем упругости E_a. Как известно, в этом случае материал можно считать неоднородно-изотропным с приведенными параметрами Ламе [13]:

$$\begin{aligned} \lambda &= (1-V)\lambda_m + VE_a/15, \\ \mu &= (1-V)\mu_m + VE_a/15, \end{aligned} \tag{1}$$

где V(x,y) – коэффициент объемного содержания (концентрация) волокон.

При известных параметрах $\lambda(x,y)$ и $\mu(x,y)$, граничных условиях относительно напряжений и в предположении плоского напряженного состояния для определения напряжений имеем следующую краевую задачу [13]:

$$\nabla^2(\gamma\,\nabla^2 F) = \beta_{xx}F_{yy} - 2\beta_{xy}F_{xy} + \beta_{yy}F_{xx} \tag{2}$$

с граничными условиями

$$\begin{aligned} F|_L &= \int_0^s \left[-x_s \int_0^s q_2(s)ds + y_s \int_0^s q_1(s)ds \right] ds, \\ F_n|_L &= -x_n \int_0^s q_2(s)ds + y_n \int_0^s q_1(s)ds, \end{aligned} \tag{3}$$

где F – функция напряжений плоской задачи, связь которой с напряжениями определяется как

$$\sigma_x = F_{yy}, \sigma_y = F_{xx}, \tau_{xy} = -F_{xy}. \tag{4}$$

Функции координат γ и β выражаются через приведенные параметры Ламе:

$$\gamma = \frac{\lambda+\mu}{\mu(3\lambda+2\mu)}, \beta = \frac{1}{2\mu}, \tag{5}$$

s – длина дуги контура L балки, обходимого из фиксированной начальной точки до текущей точки контура против часовой стрелки; n(s) – внешняя нормаль к контуру в точке s; $q_1(s)$, $q_2(s)$ – горизонтальная и вертикальная проекция внешнего усилия в точке s контура; ∇^2 – оператор Лапласа.

Нижние индексы у величин x, y, F, β обозначают соответствующие частные производные.

Решение данной краевой задачи проводится методом возмущений [13]. Для этого представляем заданные β и γ в виде:

$$\begin{aligned} \beta &= \beta_0[1+\beta^*(x,y)], \\ \gamma &= \gamma_0[1+\gamma^*(x,y)], \end{aligned} \tag{6}$$

где β_0, γ_0 – средние по внутренней области значения β, γ. Вводя в (6) параметр χ:

$$\begin{aligned} \beta &= \beta_0[1+\chi\beta^*(x,y)], \\ \gamma &= \gamma_0[1+\chi\gamma^*(x,y)], \end{aligned} \tag{7}$$

будем искать решение в виде ряда по параметру χ:

$$F = \sum_{k=0}^{\infty} \chi^k F_k \, . \tag{8}$$

Подставляя (7) в (2), имеем для F_0 задачу:

$$\nabla^2\nabla^2 F_0 = 0 \tag{9}$$

с краевыми условиями (3), а для F_k, k=1,2,... рекуррентную последовательность задач:

$$\nabla^2\nabla^2 F_k = \frac{\beta_0}{\gamma_0}\left(\beta^*_{xx}\frac{\partial^2 F_{k-1}}{\partial y^2} - 2\beta^*_{xy}\frac{\partial^2 F_{k-1}}{\partial x \partial y} + \beta^*_{yy}\frac{\partial^2 F_{k-1}}{\partial x^2}\right) - \nabla^2\left(\gamma^*\nabla^2 F_{k-1}\right) \tag{10}$$

с нулевыми граничными условиями.

Найдя F_k, k=0,1,2,..., окончательное решение получим, полагая в (8) χ=1. При расчетах ограничимся нахождением F_k лишь при нескольких k=0,1,2,..,p, полагаясь на быструю сходимость ряда (8).

Применение *метода возмущений* позволило нам при переходе от уравнения (2) к системе (9), (10) исключить из дифференциального оператора левой части функцию $\gamma(x,y)$ и, следовательно, *вид* оператора перестал зависеть от значений координат.

Польза от такого преобразования становится очевидной, если учесть, что прямую задачу предполагалось решать методом конечных разностей [14]. Следует отметить, что метод конечных разностей применим и к исходной задаче (2), (3). Однако, как известно из теории разностных схем [15], система линейных уравнений разностной краевой задачи, аппроксимирующей исходную дифференциальную задачу с оператором левой части, зависящим от координат, будет обусловлена тем хуже, чем больше отношение максимального элемента матрицы этой системы к минимальному.

Последнее отношение определялось в задаче (2), (3) функцией γ, которая является объектом варьирования при оптимизации и, следовательно, достаточно произвольна. В полученных задачах (9), (10) проблем с плохой обусловленностью системы разностных уравнений не возникает.

Оптимальное проектирование. Сформулируем теперь собственно задачу оптимального проектирования – найти такое распределение плотности армирования V(x,y), которое обеспечивает минимальный расход арматуры при выполнении прочностных ограничений при заданных условиях нагружения. Отсутствие универсальных критериев прочности, подходящих с разумной точностью для всех материалов, вынуждает нас задаться конкретным материалом. Будем считать балку-стенку изготовленной из сталефибробетона (бетонной матрицы, армированной стальными волокнами). Тонкостенные сталефибробетонные элементы считаются перспективными при строительстве, поскольку сравнительно несложно изготавливаются и превосходят по прочности и коррозионностойкости железобетонные элементы, равные им по стоимости [16].

Будем считать, что элемент выходит из строя, если хотя бы в одной внутренней точке параметры напряженного состояния превысят предельно допустимые значения. В качестве этих параметров примем максимальные растягивающее σ^{+}_{max} и сжимающее σ^{-}_{max} напряжения в точке [17]:

$$\begin{aligned} \sigma^{+}_{max} &= \frac{1}{2}(\sigma_x + \sigma_y) + \sqrt{\frac{1}{4}(\sigma_x - \sigma_y)^2 + \tau^2_{xy}}, \\ \sigma^{-}_{max} &= \frac{1}{2}(\sigma_x + \sigma_y) - \sqrt{\frac{1}{4}(\sigma_x - \sigma_y)^2 + \tau^2_{xy}}. \end{aligned} \quad (11)$$

Введем следующие гипотезы.

1. Локальная прочность материала на сжатие не зависит от плотности армирования и равна прочности неармированной бетонной матрицы $[\sigma]_M$.

2. Локальная прочность материала на растяжение пропорциональна плотности армирования и равна kV, k=const.

Принимая во внимание, что модель (1) справедлива в ограниченном диапазоне плотностей армирования, запишем уравнения задачи оптимального проектирования, сводящейся к задаче минимизации функционала G:

$$G(V) = \iint V(x, y)dxdy, \quad (12)$$

$$G(V) \to \min_{V}, \quad (13)$$

$$\sigma^{+}_{max}(V) \le kV, \text{ если } \sigma^{+}_{max} > 0, \quad (14)$$

$$\sigma^{-}_{max}(V) \ge -[\sigma]_M, \text{ если } \sigma^{-}_{max} < 0, \quad (15)$$

$$V \in [V_{min}, V_{max}], \quad (16)$$

где величины σ^{+}_{max} и σ^{-}_{max} вычисляются с помощью (11), (4) по решению прямой задачи (2), (3) для заданного распределения V.

Данную вариационную задачу с ограничениями сводим к задаче параметрической оптимизации относительно коэффициентов степенного ряда, приближающего искомое распределение V, которую решаем при помощи метода Нелдера-Мида [18].

Степенной ряд строится в предположении симметрии распределения V относительно вертикальной линии, проходящей через центр балки-стенки; в нем удерживаются члены максимальной степени S. Ограничения-неравенства (14)...(16) учитывались эмпирическим способом, близким к стандартному методу штрафных функций, а именно: при нарушения хотя бы одного из ограничений на текущей итерации метода Нелдера-Мида значение целевой функции выбиралось равным максимальному ее значению среди всех вершин текущего симплекса в пространстве переменных проектирования.

В противном случае, то есть, когда ни одно из ограничений не нарушалось, целевая функция определялась по формуле (12).

Численное моделирование осуществляли с использованием специально разработанной вычислительной программы. Время решения задач оптимизации составляло 6...15 мин на машине класса Pentium II-300MHz / 32Mb RAM.

Анализ результатов вычислительных экспериментов показал, что задача является многоэкстремальной и указанным способом можно найти лишь локальный минимум функции цели.

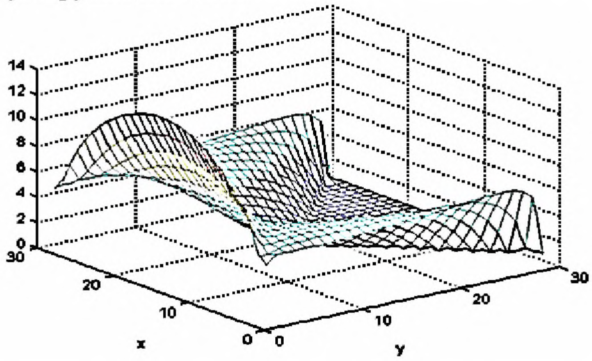

Рис. 2

На рис. 2 показано распределение V, дающее наибольшее (среди всех использованных начальных приближений) уменьшение целевой функции, равное 38%, по сравнению со случаем однородного армирования, обеспечивающего условия по прочности. По осям Ox и Oy отложены номера узлов разностной сетки, покрывающей балку-стенку; по вертикальной оси – плотность армирования V в процентах. Как видим, у верхней грани балки (y=30), где растягивающие напряжения отсутствуют, плотность армирования равна минимально допустимой. Снизу (y=0), в области действия больших растягивающих напряжений, V достигает максимальной величины 12,4%, что согласуется с интуитивными представлениями о распределениях. В ходе оптимизации активными являлись ограничения по прочности на разрыв (12) и по допустимым значениям плотностей армирования (13).

Расчет проводили при следующих значениях параметров: $P=10^4$ Н/м; $\lambda_m=560\cdot10^4$ Н/м^2; $\mu_m = 370\cdot10^4$ Н/м^2; $E_a = 10^8$ Н/м^2; $V_{min}=1\%$; $V_{max}=20\%$; $[\sigma]_M=2$; $k=5\cdot10^4$ Н/м^2; n=29; S=7.

ЛИТЕРАТУРА

1. Оптимизация механических систем. Указатель отечественной и зарубежной литературы за 1983-1987 годы. – Львов: Изд-во Львов. научн. библ-ки, 1989.
2. *Рейтман М.И., Шапиро Г.С.* Методы оптимального проектирования деформируемых тел. Постановки и способы решения задач оптимизации параметров элементов конструкций. – М.: Наука, 1976.
3. *Рейтман М.И., Шапиро Г.С.* Оптимальное проектирование деформируемых твердых тел // Итоги науки и техники. Механика деформируемого твердого тела. – М.: ВИНИТИ, 1978. Т.12. С.5...13.
4. *Аннин Б.Д., Каламарков А.Л., Колпаков А.Г., Партон В.Э.* Расчет и проектирование композиционных материалов и элементов конструкций. – М.: Наука, 1993.
5. *Баничук Н.В., Рикардс Р.Б., Кобелев В.В.* Оптимизация элементов конструкций из композиционных материалов. – М.: Машиностроение, 1988.
6. *Петров В.В., Овчинников И.Г., Шихов Ю.М.* Расчет элементов конструкций, взаимодействующих с агрессивной средой. – Саратов: Изд-во СГУ, 1987.
7. *Овчинников И.И., Мигунов В.Н., Овчинников И.Г.* Моделирование кинетики деформирования армированных конструкций в специальных эксплуатационных средах. – Пенза: ПГУАС, 2014.
8. *Бубнов С.А., Бубнов А.А., Овчинников И.И.* Конечно-элементное моделирование напряженно-деформированного состояния и поврежденности трубчатых элементов конструкций, подвергающихся высокотемпературной водородной коррозии. – 2-е изд. – М.: Горячая линия – Телеком, 2015.
9. *Овчинников И.Г., Почтман М.Ю.* Тонкостенные конструкции в условиях коррозионного износа. Расчет и оптимизация. – Днепропетровск: Изд-во ДГУ, 1995.
10. *Овчинников И.И., Овчинников И.Г., Занин А.А., Зеленцов Д.Г., Короткая Л.И.* Проблема оптимального проектирования нагруженных конструкций, подвергающихся воздействию агрессивных сред // Интернет-журнал "НАУКОВЕДЕНИЕ" №4 (2012) http://naukovedenie.ru/PDF/ 109TBH412.pdf (доступ свободный). Загл. с экрана. Яз. рус., англ.с.1-21.
11. *Филатов Г.В.* Оптимизация конструкций, взаимодействующих с агрессивной средой. – Изд-во: LAP Lambert Academic Publishing, 2014.
12. *Батаев Д.К.* Повышение водонепроницаемости бетона добавками последующего действия // Мат. конф.: Современные проблемы строительного материаловедения – Ч.1. – Пенза: ПГАСА, 1998. С.6...7.
13. *Ломакин В.А.* Теория упругости неоднородных тел. – М.: МГУ, 1976.
14. *Варвак П.М., Варвак Л.П.* Метод сеток в задачах расчета строительных конструкций. – М.: Стройиздат, 1977.
15. *Самарский А.А.* Введение в численные методы. – М.: Наука, 1987.
16. *Терегулов И.Г.* Сопротивление материалов и основы теории упругости и пластичности. – М.: Высшая школа, 1984.
17. *Малков В.П., Угодчиков А.Г.* Оптимизация упругих систем. – М.: Наука, 1981.

REFERENCES

1. Optimizacija mehanicheskih sistem. Ukazatel' otechestvennoj i zarubezhnoj literatury za 1983-1987 gody. – L'vov: Izd-vo L'vov. nauchn. bibl-ki, 1989.
2. Rejtman M.I., Shapiro G.S. Metody optimal'nogo proektirovanija deformiruemyh tel. Postanovki i sposoby reshenija zadach optimizacii parametrov jelementov konstrukcij. – M.: Nauka, 1976.
3. Rejtman M.I., Shapiro G.S. Optimal'noe proektirovanie deformiruemyh tverdyh tel // Itogi nauki i tehniki. Mehanika deformiruemogo tverdogo tela. – M.: VINITI, 1978. T.12. S.5...13.
4. Annin B.D., Kalamarkov A.L., Kolpakov A.G., Parton V.Je. Raschet i proektirovanie kompozicionnyh materialov i jelementov konstrukcij. – M.: Nauka, 1993.
5. Banichuk N.V., Rikards R.B., Kobelev V.V. Optimizacija jelementov konstrukcij iz kompozicionnyh materialov. – M.: Mashinostroenie, 1988.
6. Petrov V.V., Ovchinnikov I.G., Shihov Ju.M. Raschet jelementov konstrukcij, vzaimodejstvujushhih s agressivnoj sredoj. – Saratov: Izd-vo SGU, 1987.
7. Ovchinnikov I.I., Migunov V.N., Ovchinnikov I.G. Modelirovanie kinetiki deformirovanija armirovannyh konstrukcij v special'nyh jekspluatacionnyh sredah. – Penza: PGUAS, 2014.
8. Bubnov S.A., Bubnov A.A., Ovchinnikov I.I. Konechno-jelementnoe modelirovanie naprjazhenno-deformirovannogo sostojanija i povrezhdennosti trubchatyh jelementov konstrukcij, podvergaju-shhihsja

vysokotemperaturnoj vodorodnoj korrozii. – 2-e izd. – M.: Gorjachaja linija – Telekom, 2015.
9. Ovchinnikov I.G., Pochtman M.Ju. Tonkostennye konstrukcii v uslovijah korrozionnogo iznosa. Raschet i optimizacija. – Dnepropetrovsk: Izd-vo DGU, 1995.
10. Ovchinnikov I.I., Ovchinnikov I.G., Zanin A.A., Zelencov D.G., Korotkaja L.I. Problema optimal'nogo proektirovanija nagruzhennyh konstrukcij, pod-vergajushhihsja vozdejstviju agressivnyh sred // Internet-zhurnal "NAUKOVEDENIE" №4 (2012) http://naukovedenie.ru/PDF/ 109TVN412.pdf (dostup svobodnyj). Zagl. s jekrana. Jaz. rus., angl.s.1-21.
11. Filatov G.V. Optimizacija konstrukcij, vzaimodejstvujushhih s agressivnoj sredoj. – Izd-vo: LAP Lambert Academic Publishing, 2014.
12. Bataev D.K. Povyshenie vodonepronicaemosti betona dobavkami posledujushhego dejstvija // Mat. konf.: Sovremennye problemy stroitel'nogo materialovedenija – Ch.1. – Penza: PGASA, 1998. S.6...7.
13. Lomakin V.A. Teorija uprugosti neodnorodnyh tel. – M.: MGU, 1976.
14. Varvak P.M., Varvak L.P. Metod setok v zadachah rascheta stroitel'nyh konstrukcij. – M.: Strojizdat, 1977.
15. Samarskij A.A. Vvedenie v chislennye metody. – M.: Nauka, 1987.
16. Teregulov I.G. Soprotivlenie materialov i osnovy teorii uprugosti i plastichnosti. – M.: Vysshaja shkola, 1984.
17. Malkov V.P., Ugodchikov A.G. Optimizacija uprugih sistem. – M.: Nauka, 1981.

Рекомендована кафедрой строительной механики. Поступила 31.08.17.