

РАСЧЕТ ГИБКОЙ НИТИ ПОСТОЯННОГО ТЯЖЕНИЯ

CONSTANT STRESS FLEXIBLE CABLE CALCULATION

А.Н. АВЕРИН, С.В. ЕФРЮШИН
A.N. AVERIN, S.V. EFRYUSHIN

(Воронежский государственный технический университет)
(Voronezh State Technical University)

E-mail an_averin@mail.ru; ooo.stroynauka@mail.ru

Рассматривается задача расчета напряженно-деформированного состояния гибкой нити постоянного тяжения. Используется дискретная расчетная модель нити в виде цепи, состоящей из стержней, соединенных между собой шарнирами. Для плоской расчетной схемы получена разрешающая система двух нелинейных уравнений относительно неизвестных проекций усилия в первом звене цепи. Приведен пример расчета.

The problem of constant stress flexible cable deflected mode calculation is under analysis. Design discrete model of the cable as a lashing, consisting of the rods joined together by hinges is used. Resolving system of two nonlinear equations relatively unknown stress projection in the first link was obtained for the flat design scheme. The calculation example is presented.

Ключевые слова: расчетная модель нити, нелинейные уравнения, нить постоянного тяжения.

Keywords: design cable model, nonlinear equations, constant stress cable.

В качестве расчетной схемы работы нити пряжи при растяжении используется неполая гибкая нить. В настоящее время в конечно-элементных комплексах расчет гибких нитей выполняется по дискретной схеме, и число разрешающих нелинейных уравнений зависит от числа узлов ансамбля КЭ (для пространственной модели это число равно $3m$, где m – число узлов).

Рассмотрим дискретную модель гибкой нити в виде цепи, состоящей из стержней, соединенных между собой шарнирами (рис. 1 – дискретная модель гибкой нити)

Введем обозначения: l_i, EA_i – длина и жесткость на растяжение звена цепи с номером i ; X_1, Y_1, Z_1 – проекции усилия на координатные оси в 1-м звене цепи;

$[x_n, y_n, z_n], [x_k, y_k, z_k]$ – координаты начала и конца нити; P_j^x, P_j^y, P_j^z – проекции узловой нагрузки.

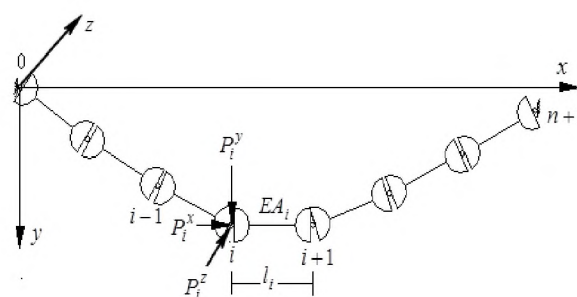


Рис. 1

Уравнения гибкой нити имеют вид [1]:

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n \ell_i (X_1 - Q_i^x) \left(\frac{1}{\sqrt{(X_1 - Q_i^x)^2 + (Y_1 - Q_i^y)^2 + (Z_1 - Q_i^z)^2}} + \frac{1}{EA_i} \right) &= x_k - x_n, \\ \sum_{i=1}^n \ell_i (Y_1 - Q_i^y) \left(\frac{1}{\sqrt{(X_1 - Q_i^x)^2 + (Y_1 - Q_i^y)^2 + (Z_1 - Q_i^z)^2}} + \frac{1}{EA_i} \right) &= y_k - y_n, \\ \sum_{i=1}^n \ell_i (Z_1 - Q_i^z) \left(\frac{1}{\sqrt{(X_1 - Q_i^x)^2 + (Y_1 - Q_i^y)^2 + (Z_1 - Q_i^z)^2}} + \frac{1}{EA_i} \right) &= z_k - z_n. \end{aligned} \quad (1)$$

В уравнениях (1) введены следующие обозначения:

$$Q_1^x = 0, Q_1^y = 0, Q_1^z = 0; \quad Q_i^x = \sum_{j=1}^{i-1} P_j^x,$$

$$Q_i^y = \sum_{j=1}^{i-1} P_j^y, \quad Q_i^z = \sum_{j=1}^{i-1} P_j^z \quad (i = 2 \dots n).$$

Система трех нелинейных уравнений (1) относительно неизвестных X_1, Y_1, Z_1 – проекций продольной силы в первом звене цепи – является исходной для расчета пространственной гибкой нити. Решение системы (1) выполняется методом Ньютона.

Матрица Якоби системы симметричная, а ее элементы вычисляются по аналитическим формулам.

Таким образом, порядок разрешающих уравнений не зависит от числа звеньев цепи, и напряженно-деформированное состояние нити полностью определяется тремя параметрами: X_1, Y_1, Z_1 .

Ниже представлен алгоритм вычисления усилий и перемещений.

Проекция усилия в звеньях цепи вычисляются по формулам:

$$X_i = X_1 - \sum_{j=1}^{i-1} P_j^x, \quad Y_i = Y_1 - \sum_{j=1}^{i-1} P_j^y, \quad Z_i = Z_1 - \sum_{j=1}^{i-1} P_j^z \quad (i = 2 \dots n).$$

Продольная сила в звеньях цепи и направляющие косинусы элементов опре-

деляются через проекции усилий:

$$N_i = \sqrt{X_i^2 + Y_i^2 + Z_i^2}, \quad \cos(\alpha_i) = \frac{X_i}{N_i}, \quad \cos(\beta_i) = \frac{Y_i}{N_i}, \quad \cos(\gamma_i) = \frac{Z_i}{N_i}.$$

Координаты узлов цепи вычисляются с

учетом деформации ее звеньев:

$$\begin{aligned} x_0 = x_n, \quad y_0 = y_n, \quad z_0 = z_n; \quad x_i = x_{i-1} + \ell_i \cos(\alpha_i) + \frac{\ell_i X_i}{EA_i}, \\ y_i = y_{i-1} + \ell_i \cos(\beta_i) + \frac{\ell_i Y_i}{EA_i}, \quad z_i = z_{i-1} + \ell_i \cos(\gamma_i) + \frac{\ell_i Z_i}{EA_i} \quad (i = 1 \dots n). \end{aligned}$$

Выполнены исследования сходимости решения уравнений (1) к точному решению в зависимости от числа звеньев цепи. Проводили сравнение с известными аналитическими решениями [2]. Установлено, что при числе зве-

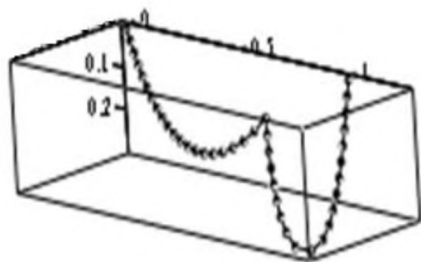
ньев цепи $n \geq 16$ погрешность по усилиям и перемещениям не превышает 0,5%.

Важно отметить, что при любом значении числа звеньев n число разрешающих уравнений для пространственной нити

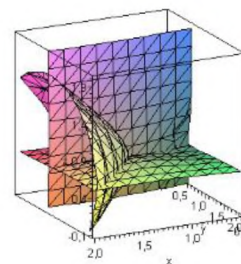
$m = 3$, для плоской нити $m = 2$, а для нити, нагруженной симметричной вертикальной нагрузкой с опорами на одном уровне, $m=1$.

Сведение решения задачи к системе трех уравнений позволяет не только выбрать начальное приближение к решению (в результате графического просмотра), но и сделать предположение о единственности

решения системы (1). На рис. 2-а показана гибкая нить, нагруженная пространственной системой сил. На рис. 2-б представлена графическая иллюстрация единственности решения системы трех нелинейных уравнений (использована команда `implicitplot3d` системы компьютерной математики Maple для построения поверхности, заданной неявной функцией).



а)



б)

Рис. 2

Перейдем к построению разрешающих уравнений для расчета нити постоянного тяжения. Термин «постоянное тяжение» используется в практике проектирования конструкций для обозначения крепления опорных нитей. Нить постоянного тяжения представляет собой опорную нить, перекинутую через блок с подвешенным контргрузом P (рис. 3).

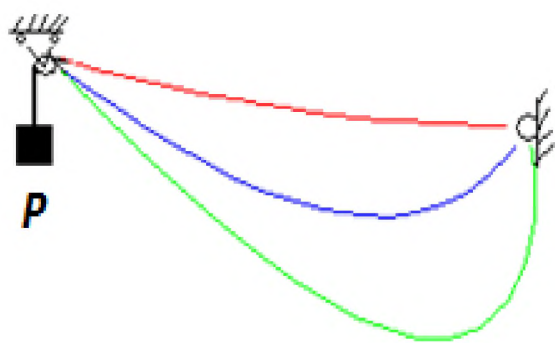


Рис. 3

Применение опорных нитей с заданным усилием в начале нити обеспечивает автоматическое поддержание нитевой системы в проектном положении независимо от температурных колебаний или накопленных остаточных деформаций.

За счет изменения длины заготовки выпускаемой части нити L обеспечивается постоянное усилие в начале нити (в точке касания с блоком). По длине нити усилие является переменным.

Будем рассматривать плоскую модель нити. Введем обозначения: L_0 – длина заготовки всей нити, L – длина выпускаемой части нити, q – погонный вес нити, n – число звеньев цепи, $l_i = \frac{L}{n}$ – длина звена цепи, P – вес груза, $P_0 = qL_0$ – вес нити, $q(L_0 - L)$ – вес участка нити между блоком и грузом. В узлах цепи приложены вертикальные P_j^y и горизонтальные P_j^x силы:

$$Q_1^x = 0, Q_1^y = 0; Q_i^x = \sum_{j=1}^{i-1} P_j^x, Q_i^y = \sum_{j=1}^{i-1} P_j^y \quad (i = 2 \dots n). \quad (2)$$

Продольная сила в первом звене цепи равна:

$$N_1 = \sqrt{X_1^2 + Y_1^2} = P + q(L_0 - L). \quad (3)$$

С учетом введенных обозначений и соотно-

шения (3) система уравнений (1) примет вид:

$$\begin{aligned} \frac{L}{n} \left(\sum_{i=1}^n (X_1 - Q_i^x) \left(\frac{1}{\sqrt{(X_1 - Q_i^x)^2 + (Y_1 - Q_i^y)^2}} + \frac{1}{EA_i} \right) \right) &= (x_k - x_n), \\ \frac{L}{n} \left(\sum_{i=1}^n (X_1 - Q_i^y) \left(\frac{1}{\sqrt{(X_1 - Q_i^x)^2 + (Y_1 - Q_i^y)^2}} + \frac{1}{EA_i} \right) \right) &= (y_k - y_n), \\ L &= \frac{\hat{P} - \sqrt{X_1^2 + Y_1^2}}{q}, \end{aligned} \quad (4)$$

где $\hat{P} = P + qL_0$ – суммарный вес груза и заготовки нити.

В уравнениях (4) вертикальные узловые силы представляются суммой двух слагае-

мых: силами от собственного веса нити $\frac{Lq}{n}$

и постоянными силами P_j^y :

$$Q_1^x = 0, Q_1^y = 0; Q_i^x = \sum_{j=1}^{i-1} P_j^x, Q_i^y = \sum_{j=1}^{i-1} \left(\frac{Lq}{n} j + P_j^y \right), \quad (i = 2..n).$$

Так как L – длина выпускаемой части нити явно выражается через X_1, Y_1 – проекции усилия в первом звене цепи, то для нити постоянного тяжения разрешающие уравнения представляют собой систему двух нелинейных уравнений.

Отметим, что матрица Якоби системы (4) вычисляется по аналитическим формулам.

В работе [2] для нити постоянного тяжения элементы касательной матрицы жесткости вычислялись с помощью формул численного дифференцирования, а матрица в целом не являлась симметричной даже при действии только сил собственного веса. Отсутствие симметрии объяснялось тем, что не учитывался вес участка каната между блоком и грузом.

Пример. Исходные данные: длина заготовки нити $L_0 = 21$ м; жесткость на растяжение $EA = 5000$ Н; координаты начала и конца нити $(0,0), (20,2)$; расстояние между точкой касания нитью блока и точкой закрепления $L_r = 20,099751$ м; погонный вес нити $q = 0,1$ Н/м; число звеньев цепи $n = 40$; вес груза $P = 4$ Н; вес нити $P_0 = 2,1$ Н. Расчет выполнялся на действие сил собственного веса нити ($P_j^x = 0$).

Результаты расчета: проекции усилия в первом звене цепи: $X_1=3,831$ Н, $Y_1=1,371$ Н; продольная сила в 1-м звене цепи $N_1 = 4,06944$ Н; длина выпускаемой части нити $L = 20,306$ м; длина между грузом и блоком $L_{gb} = 0,694$ м; стрела провеса в середине полета $f = 1,493$ м.

ВЫВОДЫ

Таким образом, в работе для плоской расчетной схемы нити постоянного тяжения получена компактная разрешающая система двух нелинейных уравнений относительно неизвестных проекций усилия в первом звене цепи; приведен пример эффективного решения.

ЛИТЕРАТУРА

1. Аверин А.Н. Уравнения гибкой нити // Межвуз. сб. науч. тр.: Современные методы статического и динамического расчета сооружений и конструкций. – Воронеж: ВИСИ, 1992. – Вып. 1. С.117...121.
2. Меркин Д.Р. Введение в механику гибкой нити. – М.: Наука. Главная редакция физико-математической литературы, 1980.
3. Зылев В.Б., Соловьев Г.П., Штейн А.В. Расчет нитевых систем, содержащих нити постоянного тяжения // Строительная механика и расчет сооружений. – 1985, № 1.

REFERENCES

1. Averin A.N. Uravnenija gibkoj niti // Mezhvuz. sb. nauch. tr.: Sovremennye metody staticeskogo i dinamicheskogo rascheta sooruzhenij i konstrukcij. – Voronezh: VISI, 1992. – Vyp. 1. S.117...121.
2. Merkin D.R. Vvedenie v mehaniku gibkoj niti. – M.: Nauka. Glavnaja redakcija fiziko-matematicheskoy literatury, 1980.
3. Zylev V.B., Solov'ev G.P., Shtejn A.V. Raschet nitevyh sistem, soderzhashhih niti postojannogo tjazhenija // Stroitel'naja mehanika i raschet sooruzhenij. – 1985, № 1.

Рекомендована кафедрой строительной механики. Поступила 31.08.17.