

УДК 677.017.335

**ТЕОРИЯ ПРОЕКТИРОВАНИЯ НИТИ
С УЧЕТОМ ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ ВОЛОКОН**

**THE THEORY OF DESIGNING OF A YARN
IN VIEW OF INTERACTION OF FIBRES**

В.П. ЩЕРБАКОВ, А.В. ГРАЧЕВ, Н.С. СКУЛАНОВА, Т.И. ПОЛЯКОВА, С.Л. ХАЛЕЗОВ
V.P. SCHERBAKOV, A.V. GRACHEV, N.S. SKULANOVA, T.I. POLJAKOVA, S.L. KHALEZOV

(Российский государственный университет им. А.Н. Косыгина (Технологии. Дизайн. Искусство),
Ивановский государственный политехнический университет)
(Russian State University named after A.N. Kosygin (Technologies. Design. Art),
Ivanovo State Polytechnical University)
E-mail: victor.scherbackow2012@yandex.ru

Проведено исследование напряжений и деформаций волокон и пряжи, учитывающее изменение диаметра пряжи при ее деформировании, действие сжимающих сил, возникающих вследствие пространственного расположения волокон в пряже. Показано, что учет сжимающего напряжения увеличивает деформацию волокон и прочность пряжи несколько уменьшается.

This research of tension and deformations of fibres and yarn which takes into account change of diameter of a yarn during deformation, action of the compressing forces arising because of a spatial arrangement of fibres in a yarn. It is shown, that compressing increases deformation of a fibres and reduces strength of yarn.

Ключевые слова: нить, пряжа, кручение, винтовая линия, напряжение, деформация, растяжение, сжатие, модуль упругости.

Keywords: string, yarn, torsion, screw line, pressure (voltage), deformation, stretching, compression, module of elasticity.

В книгах, статьях авторов [1...3] изложена теория проектирования нити, в соответствии с которой предел прочности (разрывное напряжение) нити σ_{y*} определяется формулой:

$$\sigma_{y*} = \sigma_{f*} \cos^2 \beta. \quad (1)$$

Здесь σ_{f*} – предел прочности волокна, который записывается в виде закона Гука:

$$\sigma_{f*} = E_f \varepsilon_{f*}. \quad (2)$$

Звездочкой обозначены величины, относящиеся к предельному состоянию. Мо-

доль упругости нити E_y уменьшается в зависимости от угла кручения β и соотношения модулей нити и волокна:

$$E_y = E_f \cos^2 \beta. \quad (3)$$

Между волокнами вдоль винтовой линии возникает контактная нагрузка интенсивностью g .

У винтовой линии главная нормаль пересекает ось нити под прямым углом и совпадает с ее радиусом. Приведенное равенство (1) не учитывает ни изменения толщины нити при деформировании, ни действия сжимающих сил, возникающих из-за пространственного расположения волокон в нити при ее нагружении. Проведем более

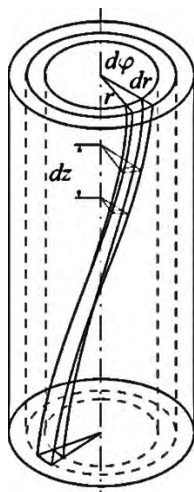


Рис. 1

Рассмотрим малый винтовой элемент волокна в нити (рис. 1), расположенный между двумя цилиндрами радиусов r и $(r+dr)$ и между двумя винтовыми линиями, смещенными относительно друг друга на угол $d\varphi$.

Элементарный объем ориентирован вдоль направления винтовой линии и определяется длиной отрезка dz , параллельного оси нити. Действующие на элемент силы направлены по нормали к каждой из шести граней объема, напряжение σ_f в волокне действует параллельно, напряжение g – перпендикулярно оси волокна (рис. 2 – равновесие элемента волокна).

полное исследование напряжений и деформаций волокон и нити, приближающее прочностные расчеты нити к ее действительному состоянию [1...3].

Введем параметры $u = \ell/L$, $c = \cos \beta = h/L$, где L – длина винтовой линии на поверхности нити, соответствующая радиусу R ; u – радиальное расположение волокна, изменяющееся от нуля в центре нити до единицы на ее поверхности. В дальнейшем нам необходимы соотношения:

$$\left(\frac{r}{R}\right)^2 = \frac{\ell^2 - h^2}{L^2 - h^2} = \frac{u^2 - c^2}{1 - c^2}; \quad \ell^2 = h^2 + 4\pi^2 r^2;$$

$$\cos \vartheta = \frac{h}{\ell} = \frac{c}{u}; \quad \sin \vartheta = \frac{2\pi r}{\ell} = \sqrt{1 - \frac{c^2}{u^2}}.$$

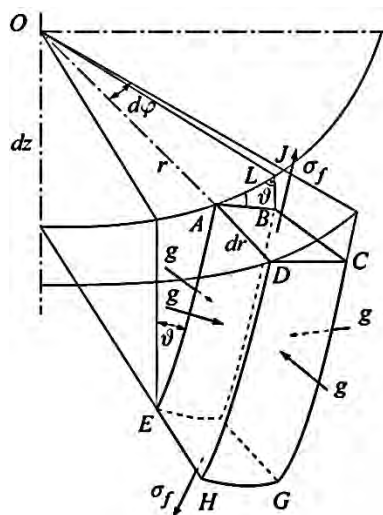


Рис. 2

Принимаем $(+\sigma_f)$ – растяжение и $(+g)$ – сжатие. Изменение диаметра нити может быть определено параметром, аналогичным коэффициенту Пуассона, характеризующему поперечное сжатие:

$$v_y = -\frac{dr/r}{dh/h}. \quad (4)$$

Определив деформацию нити как $\varepsilon_y = dh/h$, напишем формулу:

$$\varepsilon_r = \varepsilon_y \left[\frac{c^2}{u^2} - v_y \left(1 - \frac{c^2}{u^2} \right) \right],$$

связывающую деформацию волокна ε_f с деформацией нити ε_y .

В условиях растягивающего σ_f и сжимающего g напряжений деформация волокна, как это следует из курса сопротивления материалов, равна:

$$\varepsilon_f = \frac{\sigma_f}{E_f} - \frac{2\nu_f}{E_f}(-g), \quad (5)$$

где ν_f – коэффициент Пуассона волокна. Можно считать, что последнее соотношение является основным, определяющим влияние взаимодействующих между волокнами сил на деформацию волокна и, в конечном счете, на прочность нити. Сжимающее напряжение g увеличивает деформацию волокна ε_f и для достижения предельной деформации требуется меньшее растягивающее напряжение σ_f . Поэтому следует ожидать меньшую по сравнению с (1) прочность нити, если учесть изменение диаметра нити и действие сжимающих сил.

Объединив выражения для деформаций волокна, получим:

$$\varepsilon_y \left[\frac{c^2}{u^2} - \nu_y \left(1 - \frac{c^2}{u^2} \right) \right] = \frac{1}{E_f} (\sigma_f + 2\nu_f g),$$

откуда

$$\sigma_f = E_f \varepsilon_y \left[\frac{c^2}{u^2} - \nu_y \left(1 - \frac{c^2}{u^2} \right) \right] - 2\nu_f g. \quad (6)$$

Произведение $E_f \varepsilon_y$ равно напряжению σ_f , которое возникает в центральных волокнах ($r_y=0$), где деформации волокна и нити одинаковы. Используя σ_0 в качестве нормализующего параметра, перейдем к безразмерным величинам:

$$\tilde{\sigma}_f = \frac{\sigma_f}{\sigma_{f_0}}, \quad (7)$$

$$\tilde{g} = \frac{g}{\sigma_{f_0}}. \quad (8)$$

Здесь величины со знаком тильды наверху являются безразмерными. Тогда:

$$\tilde{\sigma}_f = \frac{c^2}{u^2} - \nu_y \left(1 - \frac{c^2}{u^2} \right) - 2\nu_f \tilde{g}. \quad (9)$$

Из анализа равновесия выделенного малого объема получим относительное радиальное напряжение \tilde{g} в зависимости от радиального расстояния или абсолютное радиальное напряжение g :

$$\tilde{g} = \frac{1+\nu_y}{1+2\nu_f} \frac{c^2}{u^2} (1-u^{1+2\nu_f}) - \nu_y \frac{1-u^{2\nu_f-1}}{2\nu_f-1} \quad (10)$$

и относительное растягивающее напряжение:

$$\tilde{\sigma}_f = \frac{(1+\nu_y)c^2}{(1+2\nu_f)u^2} (1+2\nu_f u^{1+2\nu_f}) + \nu_y \frac{1-2\nu_f u^{2\nu_f-1}}{2\nu_f-1}. \quad (11)$$

Изменение напряжений $\tilde{\sigma}_f$ и \tilde{g} в зависимости от радиального расстояния r/R для различных углов кручения β показано на рис. 3 [3].

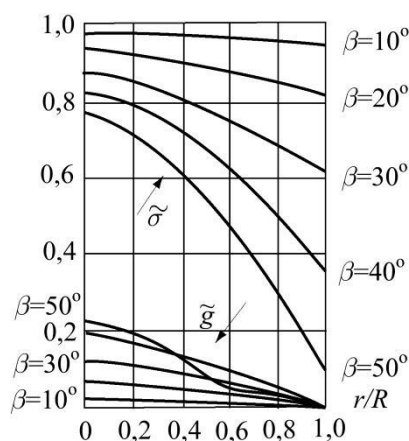


Рис. 3

Рассмотрим напряжения $\tilde{\sigma}$ и \tilde{g} в частном случае $\nu_y = \nu_f = 0,5$. Это существенно упрощает интерпретацию проводимых расчетов. Но сразу возникает вопрос, что делать с формулами (10) и (11), в которых

присутствует делитель $(2v_f - 1) = 0$. Решение этого вопроса заимствуем из [3]. Положим $2v_f = 1 + \delta$ и $u = e^y$. Будем иметь

$$\frac{1 - u^{2v_f - 1}}{2v_f - 1} = \frac{1}{\delta}(1 - e^{y\delta}) = \frac{1}{\delta}[1 - 1 - y\delta - O(\delta^2)] = -y = -\ln u.$$

Аналогично

$$\frac{1 - 2v_f u^{2v_f - 1}}{2v_f - 1} = \frac{1}{\delta}(1 - e^{y\delta}) = \frac{1}{\delta}[1 - (1 + \delta)e^{y\delta}] =$$

$$= \frac{1}{\delta}\{1 - (1 + \delta)[1 + y\delta + O(\delta^2)]\} = -(1 + y) = -(1 + \ln u).$$

$$\tilde{\sigma}_y = \frac{2c^2}{(1 + 2v_f)(1 - c^2)} \left\{ (1 + v_y) \left[\ln c + \frac{2(1 + v_f)}{1 + 2v_f} \right] (1 - c^{2v_f + 1}) - \frac{v_y}{2} \left[\frac{3(1 + 2v_f)}{2v_f - 1} - \frac{4(1 + v_f)}{2v_f - 1} c^{2v_f - 1} - \frac{1}{c^2} \right] \right\}. \quad (12)$$

Напомним, что переход к безразмерным напряжениям был проведен делением напряжений на число, равное напряжению σ_0 , которое возникает в центральных волокнах, где деформации волокон и нити одинаковы. Тогда из формулы (12) следует, что безразмерное напряжение в нити представляет собой функцию $\tilde{\sigma}_y(\beta, v_f, v_y)$, равную напряжению в нити, деленному на напряжение отдельных волокон, деформации которых совпадают с деформацией нити. Кроме того, отсюда же следует соотношение модулей упругости нити E_y и волокна E_f :

$$\frac{E_y}{E_f} = \tilde{\sigma}_y(\beta, v_f, v_y). \quad (13)$$

Разрушение нити начинается с разрыва волокон. Предел прочности волокна при растяжении определяется соотношением $\sigma_{f*} = E_f \varepsilon_{f*}$. Здесь и далее звездочкой обозначены величины, относящиеся к предельному состоянию. Деформация волокон

Тогда формулы (10) и (11) принимают вид:

$$\tilde{\sigma}_f = \frac{3c^2}{4u^2}(1 + u^2) - \frac{1}{2}(1 + \ln u),$$

$$\tilde{g} = \frac{3}{4} \frac{c^2}{u^2}(1 - u^2) + \frac{1}{2} \ln u,$$

$$\tilde{\sigma}_y = \frac{2}{1 - c^2} \int_0^1 \left[\tilde{\sigma}_f \frac{c^2}{u^2} - \tilde{g} \left(1 - \frac{c^2}{u^2} \right) \right] u du.$$

В результате интегрирования с учетом выражений (10) и (11) получаем среднее безразмерное растягивающее напряжение в нити:

уменьшается пропорционально $\cos^2 \theta$ в радиальном направлении нити от $\varepsilon_f = \varepsilon_y$ до $\varepsilon_f = \varepsilon_y \cos^2 \beta$. Максимальная деформация возникает в центральных волокнах и равна деформации нити. Максимальное напряжение, или предел прочности при растяжении, центральных волокон, которые первыми разрываются и затем инициируют разрушение нити:

$$\sigma_{f*} = E_f \varepsilon_{f*} = E_f \varepsilon_{y*}.$$

Напряжение в нити при той же деформации ε_{y*} определяется выражением:

$$\sigma_{y*} = E_y \varepsilon_{y*}.$$

Отсюда следует, что отношение предела прочности нити к пределу прочности волокна равно отношению модуля упругости нити к модулю упругости волокна и представляет собой функцию $\tilde{\sigma}_y(\beta, v_f, v_y)$:

$$\frac{\sigma_{y*}}{\sigma_{f*}} = \frac{E_y}{E_f} = \frac{2 \cos^2 \beta}{(1 + 2v_f)(1 - \cos^2 \beta)} \left\{ (1 + v_y) \left[\ln \cos \beta + \frac{2(1 + v_f)}{1 + 2v_f} (1 - (\cos \beta)^{2v_f + 1}) \right] - \right. \\ \left. - \frac{v_y}{2} \left[\frac{3(1 + 2v_f)}{2v_f - 1} - \frac{4(1 + v_f)}{2v_f - 1} (\cos \beta)^{2v_f - 1} - \frac{1}{\cos^2 \beta} \right] \right\}. \quad (14)$$

Выясним, как поведет себя выражение $\frac{3(1+2v_f)}{2v_f-1} - \frac{4(1+v_f)}{2v_f-1} (\cos\beta)^{2v_f-1}$ в этой функции в случае $v_f=0,5$ и делитель $(2v_f-1)=0$. Воспользуемся преобразованиями, сходными с теми, которые были проведены в формулах (10) и (11).

Положим $2v_f = 1 + \delta$ и $c = e^y$. Тогда:

$$\begin{aligned} 3(1+2v_f) &= 6 + 3\delta, \\ 4(1+v_f) &= 6 + 2\delta, \\ c^{2v_f-1} &= c^\delta = e^{y\delta} = 1 + y\delta + O(\delta^2). \end{aligned}$$

Подставим эти соотношения в искомое выражение и получим:

$$\begin{aligned} \frac{3(1+2v_f)}{2v_f-1} - \frac{4(1+v_f)}{2v_f-1} c^{2v_f-1} &= \frac{1}{\delta} \left\{ 6 + 3\delta - (6 + 2\delta) [1 + y\delta + O(\delta^2)] \right\} = \\ &= \frac{1}{\delta} [3\delta - 2\delta - 6y\delta + O(\delta^2)] = 1 - 6y = 1 - 6 \ln c. \end{aligned}$$

Тогда если принять коэффициент Пуассона нити $v_y=0,5$ и равный ему коэффициент Пуассона волокна, то формула (14),

определяющая прочность нити, преобразуется к виду:

$$\begin{aligned} \frac{\sigma_{y*}}{\sigma_{f*}} = \frac{E_y}{E_f} = \frac{\cos^2 \beta}{1 - \cos^2 \beta} \left\{ \frac{3}{2} \left[\ln \cos \beta + \frac{3}{2} (1 - \cos^2 \beta) \right] - \frac{1}{4} \left(1 - 6 \ln \cos \beta - \frac{1}{\cos^2 \beta} \right) \right\} = \\ = \frac{1}{4} + \frac{9}{4} \cos^2 \beta + \frac{3 \cos^2 \beta}{1 - \cos^2 \beta} \ln \cos \beta. \end{aligned} \quad (15)$$

В простейшем случае, не учитывая изменения диаметра нити, ни действия поперечных сил, предел прочности нити определяется приведенной вначале формулой (1): $\sigma_{y*} = \sigma_{f*} \cos^2 \beta$. Численная оценка функции $\tilde{\sigma}_y(\beta, v_f, v_y)$ будет приведена позже, но какая бы она ни была, ей будем отдавать предпочтение по сравнению с $\cos^2 \beta$, так как здесь отражена самоуплотняющаяся структура при формировании пряжи.

3. Hearle J.W.S., Grosberg P., Backer S. Structural Mechanics of Fibers, Yarns and Fabrics. – New York, 1969.

REFERENCES

1. Shcherbakov V.P. Prikladnaya i strukturnaya mekhanika voloknistykh materialov. – M.: "Tiso Print", 2013.
2. Shcherbakov V.P., Skulanova N.S. Osnovy teorii deformirovaniya i prochnosti tekstil'nykh materialov. – M.: MGTU im. A.N. Kosygina, 2008.
3. Hearle J.W.S., Grosberg P., Backer S. Structural Mechanics of Fibers, Yarns and Fabrics. – New York, 1969.

ЛИТЕРАТУРА

1. Щербиков В.П. Прикладная и структурная механика волокнистых материалов. – М.: "Тисо Принт", 2013.
2. Щербиков В.П., Скуланова Н.С. Основы теории деформирования и прочности текстильных материалов. – М.: МГТУ им. А.Н. Косыгина, 2008.

Рекомендована кафедрой механических технологий волокнистых материалов РГУ им. А.Н. Косыгина. Поступила 20.11.17.