

УДК 677.017.335

**РАСЧЕТ ПРОЧНОСТИ ПРЯЖИ  
С УЧЕТОМ ПОПЕРЕЧНОЙ ДЕФОРМАЦИИ**  
**CALCULATION OF STRENGTH OF THE YARN  
IN VIEW OF CROSS DEFORMATION**

*В.П. ЩЕРБАКОВ, А.В. ГРАЧЕВ, Н.С. СКУЛАНОВА, Т.И. ПОЛЯКОВА, С.Л. ХАЛЕЗОВ*  
*V.P. SCHERBAKOV, A.V. GRACHEV, N.S. SKULANOVA, T.I. POLYAKOVA, S.L. KHALEZOV*

(Российский государственный университет им. А.Н. Косыгина (Технологии. Дизайн. Искусство),  
Ивановский государственный политехнический университет)  
(Russian State University named after A.N. Kosygin (Technologies. Design. Art),  
Ivanovo State Polytechnical University)  
E-mail: victor.scherbackow2012@yandex.ru

*Проведены расчеты разрывной нагрузки пряжи для простейшей и уточненной теорий прочности. Показан механизм разрушения пряжи, получены числовые оценки основных параметров напряженно-деформированного состояния волокон и пряжи.*

*Calculations of breaking load of a yarn for the elementary and specified theories of durability of yarn. There are shown the mechanism of destruction of a yarn, it was suggested numerical estimations of key parameters is stress-strain state of fibres and yarn.*

**Ключевые слова:** нить, пряжа, кручение, винтовая линия, напряжение, деформация, растяжение, сжатие, модуль упругости.

**Keywords:** a string, a yarn, torsion, a screw line, a pressure(voltage), deformation, a stretching, compression, the module of elasticity.

В предыдущей статье авторов [1] изложена более строгая схема решения задачи о прочности пряжи по сравнению с упрощенной теорией, в соответствии с которой  $\sigma_{y*} = \sigma_r \cos^2 \beta$ . Стоит ли принимать во внимание сжатие волокон и пряжи при ее растяжении, может показать численный результат вычислений разрывной нагрузки по обеим теориям. Здесь будучи показаны и ме-

ханизм разрушения пряжи, и числовые оценки основных параметров напряженно-деформированного состояния волокон и пряжи, вплоть до предельного.

Наибольшее напряжение сосредоточено в группе волокон, расположенных по прямым линиям вдоль оси нити, где деформация волокна равна деформации нити. В этих условиях механизм разрушения нити пред-

ставляет собой последовательный разрыв волокон, сначала наиболее слабых, а затем, после обрыва одного волокна, перераспределение нагрузки на остальные  $(m-1)$  волокон. Напряжение в волокнах увеличивается, и далее разрушение будет происходить по схеме пучка [2], [5]. Распределение усилий между разорванным волокном и соседним, еще не разорванным, осуществляется в результате описанного взаимодействия волокон, и на некотором расстоянии  $\ell_s$  от места обрыва наличие обрыва практически не будет сказываться на распределении усилий. Величина усилия в оборванном волокне будет почти та же, что и в соседних необорванных волокнах. В механике композитов длина  $\ell_s$  называется неэффективной длиной, в механике волокнистых материалов – это длина скольжения [5]. Длина  $2\ell_s$  принимается за длину пучка, к которому применяется теория пучка, разработанная Даниэльсом [4]. Длина скольжения в пряже вычисляется по формуле [2...4]:

$$\ell_s = \sqrt{\frac{r_f Q}{2\mu(1-\cos^2\beta)}}, \quad (1)$$

где  $r_f$  – радиус волокна;  $Q$  – длина волны миграции волокна, равная четырем оборотам крутки;  $\mu$  – коэффициент трения между волокнами;  $\beta$  – угол кручения. Проскальзывание волокон уменьшает прочность пряжи и характеризуется коэффициентом скольжения:

$$k_s = 1 - \frac{2}{3\ell_f} \sqrt{\frac{r_f Q}{2\mu(1-\cos^2\beta)}}.$$

В цитируемой книге академика Ю.Н. Работнова [5] отмечено, что для углеродных волокон величина неэффективной длины может достигать 0,5...1 мм. При этой длине большая дисперсия прочности волокон приводит к снижению прочности пучка за счет коэффициента реализации  $k_r$  прочности волокон в пряже, определяемого формулой [2], [3], [5]:

$$k_r = \frac{(\alpha e)^{\frac{1}{\alpha}}}{\Gamma\left(1 + \frac{1}{\alpha}\right)}. \quad (2)$$

Здесь  $\alpha$  – параметр распределения Вейбулла;  $\Gamma(x)$  – гамма-функция.

Параметры  $\alpha$  и  $p_w$  распределения Вейбулла находятся из системы уравнений, выражающих среднюю прочность волокон  $\bar{p}_v$  и дисперсию их прочности  $D$ :

$$\bar{p}_f = p_w \Gamma\left(1 + \frac{1}{\alpha}\right) \quad (3)$$

и

$$D = p_w^2 \left[ \Gamma\left(1 + \frac{2}{\alpha}\right) - \Gamma^2\left(1 + \frac{1}{\alpha}\right) \right].$$

При малой длине  $2\ell_s$  снижение прочности пучка не перекрывается увеличением средней прочности волокон вследствие масштабного эффекта.

Масштабный эффект, определяющий зависимость средней прочности волокон длиной  $\ell$  от прочности волокон при стандартной длине испытаний  $\ell_0$ , записывается в виде:

$$\bar{p}_f(\ell) = p_w \left(\frac{\ell_0}{\ell}\right)^{\frac{1}{\alpha}} \Gamma\left(1 + \frac{1}{\alpha}\right). \quad (4)$$

Прочность нити отождествляется с прочностью цепи, которая определяется прочностью ее наислабейшего звена. Таким звеном в пряже будет сечение с наименьшим числом волокон. Линейная плотность пряжи является суммой большого числа независимых между собой слагаемых, каждое из которых имеет незначительные размеры по сравнению со всей суммой. В таком случае можем ожидать, что распределение данной величины мало отклоняется от нормальной формы и с вероятностью 0,954 можем определить минимальную линейную плотность пряжи:

$$\Gamma_{\min} = \bar{\Gamma}_{\text{пряжи}} - 2\sigma,$$

где  $\sigma$  – среднее квадратическое отклонение, связанное с коэффициентом вариации  $C$  соотношением  $C = \sigma / \bar{\Gamma}_{\text{пряжи}}$ . Наиболее известным и применяемым в расчетах прочности пряжи является метод А.Н. Соловьева. При проектировании хлопчатобумажной пряжи А.Н. Соловьев вводит  $3\sigma$ ,

что соответствует вероятности 0,997. Надо иметь в виду, что величина доверительной вероятности выбирается произвольно из соображений риска, возникающего вследствие принятия того или иного решения. В технических приложениях обычной считается  $p_d=0,954$ . Наверное, вероятность раскрытия парашюта должна быть больше, та же 0,997 или даже больше, но для нити это излишне. Распределение сечений гипотетического продукта по числу волокон в этих сечениях является распределением Пуассона, и квадратическая неровнота пряжи равна:

Исходные данные для волокон и массовых долей компонентов в смесовой пряже

Данная пряжа имеет в своей смеси два компонента:

- 1 - полиэфирное волокно (лавсан) 0,13 текс;
- 2 - средневолокнистый хлопок 4 типа гребенного прочеса.

"№"	"Параметр вол_ком-та\ Ком-т"	"1 ком-т"	"2 ком-т"
1	"Вид волокон"	"ПЭ"	"Хлопок"
2	"l- ср_ длина вол.(мм)....."	38	34
3	"Tf- ср_ лин_ плот_ вол.(мтекс)....."	128	161
4	"P.f- ср_ разр_ нагр_ вол (сН)....."	8.14	4.38
5	"СРв% - квадрат_ нер_ по_ прочн_ %....."	96.4	34
6	"ε - относит_ деформ_ %....."	18.6	7.4
7	"μ - структ_ коэфф_ трения (μ*кп)....."	0.374	0.25
8	"γ.f- плотность волокна (г/см^3)....."	1.38	1.5
9	"β% - массовый процент ком-та. %"	50	50
10	"λ - коэффициент Пуассона волокна"	0.3	0.3

Наибольшие усилия возникают в наиболее жестком компоненте. Жесткость одного волокна при известных из опыта разрывной нагрузке  $P_b$  и деформации  $\varepsilon_b = \Delta l / l_0$  вычисляется по формуле:

$$(E_i F_i)_1 = P_b / \varepsilon_b.$$

Жесткость компонента равна жесткости одного волокна, умноженной на число волокон  $m_i$  этого компонента. Доля  $i$ -го компонента смеси задается обычно по массе и обозначается  $\beta_i$ . Средняя линейная плотность волокон в смеси:

$$\bar{T}_b = \left( \sum_1^n \frac{\beta_i}{\bar{T}_i} \right)^{-1}. \quad (6)$$

Наислабейшим звеном в пряже будет сечение с наименьшим числом волокон. Вычисляем  $T_{\min} = 8,886$  текс. Число волокон в

$$C_r = 100 K_0 / \sqrt{T_{\text{пряжи}} / T_{\text{волокна}}}, \quad (5)$$

где  $K_0$  – коэффициент, зависящий от рода волокна. Для хлопка  $K_0 = 1,06$ .

Остальные положения теории, относящиеся к расчетам прочности многокомпонентной пряжи, подробно, с численными примерами, изложены в [2], [3].

Приведем расчеты на прочность хлопколавсановой пряжи. Характеристики волокон и пряжи даны в матрицах исходных данных волокон и пряжи документа Mathcad:

Исходные данные для проектируемой пряжи

Дополнительная информация о пряже

Доп\_инф\_пр = "Хлопко-полиэфирная пряжа"

"Параметры"	"Значения"
"1. Ту - сред_ лин_ пл_ пряжи (текс)....."	11.6
"2. Сту - квадрат_ неровн_ пр_ по_ ЛП_ для_ Lпр=0.5м (%)....."	11
"3. γу - объемная плотность пряжи (г/см^3)....."	0.8
"4. К - крутка пряжи (1/м)....."	976
"5. λу - коэффициент Пуассона пряжи"	0.5

этом сечении пряжи  $m = T_{\min} / \bar{T}_b = 62$ . В соответствии с долевым участием компонентов получим число волокон каждого из них. Но здесь надо иметь в виду, что от долей  $\beta_i$  компонентов по массе надо перейти к долям  $\alpha_i$  по числу волокон, которые между собой связаны равенством:

$$\alpha_i = \beta_i (\bar{\ell}_i \bar{T}_i)^{-1} / \left( \sum_1^n \frac{\beta_i}{\bar{\ell}_i \bar{T}_i} \right),$$

где  $\bar{\ell}_i$  – средняя длина волокна  $i$ -го компонента. Получим  $\alpha_1 = 0,53$  и  $\alpha_2 = 0,47$ . Число волокон компонентов:  $m_1 = 33$ ,  $m_2 = 29$  и соответственно их жесткости  $(E_i F_i)_1 m_i$ :  $E_1 F_1 = 1444$  сН,  $1716$  сН. Уже было указано, что наибольшие усилия возникают в наиболее жестком компоненте. Обозначив соотношение жесткостей  $e = E_1 F_1 / E_2 F_2$ , получим

отношения жесткости каждого компонента к наиболее жесткому:  $e=0,841$ .

Параметры  $\alpha$  и  $p_w$  распределения Вейбулла находятся из системы (3):  $\alpha=3,231$  и  $p_w=4,888$ . Вычисленный по формуле (2) коэффициент реализации средней прочности волокон в пряже принимает значение  $k_f=0,57$ . Длина участка скольжения определяется соотношением (4); получаем длину скольжения  $\ell_s = 0,569$  мм. Тогда удвоенная длина скольжения, равная 1,138 мм, определяет условие применения схемы Даниэльса. Вследствие масштабного эффекта прочность хлопкового волокна становится равной:

$$\bar{p}_f(1,138) = p_w \left( \frac{\ell_0}{\ell} \right)^{\frac{1}{\alpha}} \Gamma \left( 1 + \frac{1}{\alpha} \right) = 8,581 \text{ сН.}$$

Остается найти численное значение функции  $\tilde{\sigma}_y(\beta, v_f, v_y)$ , представляющей собой отношение предела прочности (разрывного напряжения) пряжи к пределу прочности волокна длиной  $2\ell_s$ :

$$\frac{\sigma_{y^*}}{\sigma_{f^*}} = \frac{E_y}{E_f} = \frac{2\cos^2\beta}{(1+2v_f)(1-\cos^2\beta)} \times \left\{ (1+v_y) \left[ \text{In} \cos\beta + \frac{2(1+v_f)}{1+2v_f} (1-\cos\beta)^{2v_f+1} \right] - \left[ \frac{v_y}{2} \left[ \frac{3(1+2v_f)}{2v_f-1} - \frac{4(1+v_f)}{2v_f-1} (\cos\beta)^{2v_f-1} - \frac{1}{\cos^2\beta} \right] \right] \right\} \quad (7)$$

Из матриц МИД<sub>f</sub> и МИД<sub>y</sub> имеем коэффициенты Пуассона волокна и пряжи соответственно 0,3 и 0,5. При известной крутке пряжи  $K = 967$  кр/м определяется угол кручения  $\beta = 0,395$  рад  $= 22,628^\circ$ . Согласно формуле (7):  $\sigma_{y^*}/\sigma_{f^*} = \tilde{\sigma}_y(\beta, v_f, v_y) = 0,796$ .

Если принять во внимание только ориентацию волокон, то уменьшение прочности нити относительно прочности волокон составит  $\sigma_{y^*}/\sigma_{f^*} = \cos^2\beta = 0,852$ . Когда мы ввели в рассмотрение действие сжимающих сил, то уже тогда отмечали ожидаемое уменьшение прогнозируемой прочности

пряжи по сравнению с обычной схемой расчета. Действительно, из условий нагружения волокна, находящегося под действием растяжения и поперечного сжатия, следует соотношение  $\sigma_f = E_f \varepsilon_f - 2v_f g$ . Очевидно, что сжимающие напряжения  $g$ , возникающие в пряже вследствие пространственного расположения волокон при кручении и растяжении, обуславливают уменьшение растягивающих напряжений  $\sigma_f$ , что и показали приведенные расчеты.

Промежуточное положение занимает случай, когда коэффициент Пуассона и волокна, и пряжи равен  $v_f = v_y = 0,5$ . Тогда:

$$\sigma_{y^*} = \sigma_{f^*} \left( \frac{1}{4} + \frac{9}{4} \cos^2\beta + \frac{3\cos^2\beta}{1-\cos^2\beta} \text{In} \cos\beta \right).$$

В нашем примере множитель  $\left( \frac{1}{4} + \frac{9}{4} \cos^2\beta + \frac{3\cos^2\beta}{1-\cos^2\beta} \text{In} \cos\beta \right)$  равен 0,784. Эта величина гораздо ближе к  $\tilde{\sigma}_y(\beta, v_f, v_y) = 0,796$ , чем к  $\cos^2\beta = 0,852$ .

Остается перейти от напряжений к силам, написать окончательное выражение и вычислить прочность пряжи. Рассматривая напряжение как внутреннюю силу, приложенную к волокну, а не к нити со свободным пространством между волокнами, отметим, что определять напряжение в нити и пряже как отношение силы к площади поперечного сечения пряжи (нити)  $\pi d^2/4$  нельзя, так как нагрузку воспринимают только волокна, а в эту формулу площади входят и воздушные пустоты в нити. Нужно учесть лишь площадь волокон, попадающих в поперечное сечение нити, принимая во внимание и расположение волокон под углом к оси нити, и различную ориентацию волокон в радиальном направлении. Предпочтительно использовать удельное напряжение как силу, отнесенную к массе единицы длины. Единицей удельного напряжения является 1 Н/текс. Связь между обычным напряжением  $\sigma$  и удельным  $\sigma_s$  выражается формулой  $\sigma = \sigma_s / \gamma$ , где  $\gamma$  – плотность волокна. Принимая за единицу плотности

1 г/см<sup>3</sup>, единицу напряжения получаем равной 1 ГПа: удельное напряжение 1 Н/текс = плотность×напряжение 1 ГПа. Удельное напряжение разрывающегося хлопкового волокна длиной 2ℓ<sub>s</sub> и прочностью 8,581 сН равно:

$$\sigma_f(8,581 \times 10^{-2}, T_f, \gamma_f) = \rho_f \gamma_f / T_f = 0,8 \text{ ГПа.}$$

Напряжение в пряже принимает величину:

$$\sigma_y = \sigma_f(8,581 \times 10^{-2}, T_f, \gamma_f) \times \tilde{\sigma}_y(\beta, v_f, v_y) = 0,637 \text{ ГПа.}$$

Прочность пряжи становится равной:

$$P_y = \sigma_y T_{29\Omega} / \gamma_f = 1,983 \text{ Н.}$$

Здесь записано T<sub>29Ω</sub> – линейная плотность разрывающегося пучка, состоящего из 29 хлопковых волокон. Окончательное соотношение для разрывной нагрузки пряжи получаем умножением P<sub>y</sub> на коэффициенты реализации, скольжения и множитель (1+ε), учитывающего как разрывающиеся, так и остальные, еще неразорванные, полиэфирные волокна, воспринимающие внешнюю нагрузку:

$$P_{y\_реал} = P_y k_r k_s (1+\epsilon) = 2,026 \text{ Н} = 202,6 \text{ сН.}$$

В простейшем случае, когда учитывается только ориентация волокон, прочность пряжи равна 216,8 сН. Разница имеется; причем разность между результатами расчета растет с увеличением угла кручения. Уже при β = 33° имеем соответственно 154,6 и 180,4.

## ВЫВОДЫ

В заключение отметим, что предсказания прочности пряжи по данным прочности ее компонент на аналитическом уровне пока не привели к результатам, позволяющим проектировать пряжу в условиях ее производства. Здесь возникает много вопросов, решение которых до сих пор неясно. К примеру, экстраполяция прочности

на малые разрывные длины, основанные на распределении Вейбулла, совершенно ненадежны. Уточнение теории пучка требует исчерпывающей статистической информации не только о прочности волокон, но и о распределении модуля упругости. Но изложенные в данной статье положения позволяют объяснить наблюдаемые изменения и характер разрушения в зависимости от структуры пряжи, объемного содержания компонентов, геометрических и механических свойств волокон.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Щербаков В.П., Грачев А.В., Скуланова Н.С., Полякова Т.И., Халезов С.Л. Теория проектирования нити с учетом взаимодействия волокон // Изв. вузов. Технология текстильной промышленности. – 2017, №6. С. 306...310.
2. Щербаков В.П. Прикладная и структурная механика волокнистых материалов. – М.: "Тисо Принт", 2013.
3. Щербаков В.П., Скуланова Н.С. Основы теории деформирования и прочности текстильных материалов. – М.: МГТУ им. А.Н. Косыгина, 2008.
4. Hearle J.W.S., Grosberg P., Backer S. Structural Mechanics of Fibers // Yarns and Fabrics. – New York, 1969.
5. Работнов Ю.Н. Механика деформируемого твердого тела, – М.: Наука. Главная редакция физико-математической литературы, 1979.

## REFERENCES

1. Sherbakov V.P., Grachev A.V., Skulanova N.S., Polyakova T.I., Halezov S.L. Teoriya proektirovaniya niti s uchetom vzaimodejstviya volokon // Izv. vuzov. Tehnologiya tekstilnoj promyshlennosti. – 2017, №6. S.306...310.
2. Sherbakov V.P. Prikladnaya i strukturnaya mehanika voloknistyh materialov. – M.: "Tiso Print", 2013.
3. Sherbakov V.P., Skulanova N.S. Osnovy teorii deformirovaniya i prochnosti tekstilnyh materialov. – M.: MG TU im. A.N. Kosygina, 2008.
4. Hearle J.W.S., Grosberg P., Backer S. Structural Mechanics of Fibers // Yarns and Fabrics. – New York, 1969.
5. Rabotnov Yu.N. Mehanika deformiruемого tverdogo tela, – M.: Nauka. Glavnaya redakciya fiziko-matematicheskoy literatury, 1979.

Рекомендована кафедрой механических технологий волокнистых материалов РГУ им. А.Н. Косыгина. Поступила 20.11.17.