

ВЕРОЯТНОСТНЫЙ РАСЧЕТ ВНЕЦЕНТРЕННОГО СЖАТИЯ СТОЙКИ С УЧЕТОМ ЭКСЦЕНТРИСИТЕТА

PROBABILISTIC CALCULATION OF ECCENTRIC COMPRESSION PILLAR WITH THE ACCOUNT OF THE ECCENTRICITY

Р.М. АЛЬ МАЛЮЛЬ
R.M. AL MALUL

(Национальный исследовательский Московский государственный строительный университет)
(Moscow State (National Research) University of Civil Engineering)
E-mail: almalyul@yandex.ru

Теория устойчивости конструкций привлекает к себе в последние годы наибольшее внимание, особенно – распределение несущей способности сжато-изогнутых стержней с учетом эксцентриситета. Надежность расчета внецентренно сжатой стойки в условиях износа гарантируется расчетом на устойчивость, который определяет необходимые соотношения с нагрузками и геометрическими размерами элементов, с одной стороны, и механическими свойствами материалов – с другой.

В статье рассматривается шарнирно опертый стержень с начальным прогибом, подвергающийся эксцентричному сжатию.

По результатам расчетов можно оценить несущую способность стержней в условиях износа.

In recent years, the stability theory of structures attracts the most attention, especially the problem of distribution of bearing strength for compressed-and-bent rods with taking the influence of the eccentricity into consideration. The reliability of the calculations for eccentrically-compressed rod under conditions of hard wear, is guaranteed through the calculation for critical-load design, the design gives the necessary relations between, on one hand, the loads and the geometry and the size of the elements and, on the other hand, mechanical properties of the materials.

The issue of the article is simply supported rod with the initial deflection, the rod is being eccentrically compressed.

With the results of the calculations, we can estimate the carrying capacity of the rods under conditions of hard wear.

Ключевые слова: надежность конструкций, устойчивость, сжато-изогнутый стержень, эксцентриситет.

Keywords: reliability of constructions, stability, compressed-and-bent rod with, eccentricity.

Известно, что надежность сжато-изогнутых стержней сильно зависит от начальных неправильностей в форме стержня, от эксцентриситета приложения нагрузки, условий закрепления, эксплуатации и т.д. [1], [3...15] Эти факторы являются случайными и для них могут быть установлены некоторые законы распределения.

В основу положим представление о работе стержня как упругого и разрушающегося при достижении крайними напряжениями предельного значения $\sigma_{тф}$. Кроме того, будем исходить из упрощенного подхода к расчету внецентренно-сжатых стержней, в которых искривленная ось стержня принимается за синусоиду. При этом внецен-

трено-сжатый стержень сводится к системе с одной степенью свободы, что не вносит большой погрешности в результаты расчета при обычных видах загрузки и приемлемо для практики.

Рассмотрим шарнирно-опертый стержень с начальным прогибом, подвергающийся внецентренному сжатию (рис. 1).

Предположим, что ось стержня имеет начальный прогиб, изменяющийся по закону:

$$\omega_0 = f_0 \sin\left(\frac{\pi x}{\ell}\right). \quad (1)$$

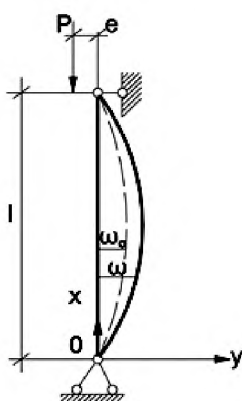


Рис. 1

Составим дифференциальное уравнение изогнутой линии:

$$EI \left(\frac{d^2 \omega}{dx^2} - \frac{d^2 \omega_0}{dx^2} \right) = -P\omega, \quad (2)$$

где ω и ω_0 – полный и начальный прогибы (рис. 1),

$$\omega = f \sin\left(\frac{\pi x}{\ell}\right). \quad (3)$$

Тогда получим:

$$f = \frac{f_0}{1 - \frac{P\ell^2}{\pi^2 EI}}, \quad (4)$$

где ℓ – свободная длина стержня; EI – жесткость поперечного сечения стержня.

Определим напряжение σ_{\max} в крайнем волокне для среднего сечения:

$$\sigma_{\max} = \frac{P}{F} + \frac{Pf}{W}, \quad (5)$$

где F и W – площадь сечения и момент сопротивления сечения.

Вводя обозначения:

$$\sigma_0 = \frac{P}{F}, \quad (6)$$

$$P = \frac{W}{F}, \quad (7)$$

$$\lambda = \ell \sqrt{\frac{F}{I}}, \quad (8)$$

где σ_0 – осевое сжимающее напряжение; P – радиус ядра поперечного сечения; λ – гибкость стержня, будем иметь:

$$\sigma_{\max} = \sigma_0 \left(1 + \frac{m}{1 - \frac{\sigma_0 \lambda^2}{\pi^2 E}} \right), \quad (9)$$

где $m = f_0/\ell$. В случае, если сила приложена с эксцентриситетом e_0 , усиливающим начальную кривизну, можно положить $m = (f_0 + e_0)/P$.

Вводя условие

$$\sigma_{\max} > \sigma_{\text{пр}}, \quad (10)$$

получим:

$$\sigma_0 \left(1 + \frac{m}{1 - \frac{\sigma_0 \lambda^2}{\pi^2 E}} \right) > \sigma_{\text{пр}}. \quad (11)$$

Будем считать, что нагрузка $\tilde{P}(A)$ представляет собой стационарный Гауссовский процесс, а прочность $\tilde{\sigma}_{\text{пр}}$ – случайную величину, распределенную по нормальному закону.

Для определения вероятности разрушения целесообразно ввести случайную величину:

$$\tilde{S}(A) = \tilde{\sigma}_{\text{пр}} - \tilde{\sigma}_0(A) \left(1 + \frac{m}{1 - \frac{\tilde{\sigma}_0(A) \lambda^2}{\pi^2 E}} \right), \quad (12)$$

которую можно назвать резервом прочности.

Анализ экспериментальных данных для значения m показывает, что величина m тем больше, чем больше гибкость стержня. Воспользуемся формулой, которая была предложена А.Р. Ржанициним [2]:

$$m = \tilde{\alpha} + \tilde{\beta}\lambda^2, \quad (13)$$

и предположим, что величины $\tilde{\alpha}$ и $\tilde{\beta}$ являются случайными и распределяются по нормальному закону с центром в начале координат.

Тогда выражение (12) примет вид:

$$\tilde{S}(A) = \tilde{\sigma}_{\text{пр}} - \tilde{\sigma}_0(A) \left(1 + \frac{\tilde{\alpha} + \tilde{\beta}\lambda^2}{1 - \frac{\tilde{\sigma}_0(A)\lambda^2}{\pi^2 E}} \right). \quad (14)$$

Вычислим частные производные функции $\tilde{S}(A)$ по ее случайным аргументам:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial S}{\partial \sigma_{\text{пр}}} &= 1, \quad \frac{\partial S}{\partial \sigma_0(A)} = -1 - \left((\tilde{\alpha} + \tilde{\beta}\lambda^2) \frac{\pi^4 E^2}{(\pi^2 E - \tilde{\sigma}_0(A)\lambda^2)} \right), \\ \frac{\partial S}{\partial \tilde{\alpha}} &= -\frac{\pi^2 E \tilde{\sigma}_0(A)}{\pi^2 E - \tilde{\sigma}_0(A)\lambda^2}, \quad \frac{\partial S}{\partial \tilde{\beta}} = -\lambda^2 \frac{\pi^2 E \tilde{\sigma}_0(A)}{\pi^2 E - \tilde{\sigma}_0(A)\lambda^2}. \end{aligned} \right\} \quad (15)$$

Подставляя в эти выражения вместо случайных аргументов их центры распределения $\bar{\sigma}_0$, $\bar{\alpha} = 0$ и $\bar{\beta} = 0$, получим коэффициенты

линейной аппроксимации функции \tilde{S} (14), которые будут иметь вид:

$$\bar{S} = \tilde{S} + (\tilde{\sigma}_{\text{пр}} - \bar{\sigma}_{\text{пр}}) - (\tilde{\sigma}_0 - \bar{\sigma}_0) - \frac{\pi^2 E \bar{\sigma}_0}{\pi^2 E - \bar{\sigma}_0 \lambda^2} (\tilde{\alpha} + \tilde{\beta}\lambda^2). \quad (16)$$

Далее получим приближенные значения центра распределения

$$\bar{S} = \bar{\sigma}_{\text{пр}} - \bar{\sigma}_0, \quad (17)$$

дисперсии

$$\hat{S} = \hat{\sigma}_{\text{пр}} + \hat{\sigma}_0 + \frac{\pi^4 E \bar{\sigma}_0^2}{(\pi^2 E - \bar{\sigma}_0 \lambda^2)^2} (\hat{\alpha} + \lambda^2 \hat{\beta}), \quad (18)$$

$$\hat{S}''(0) = \hat{\sigma}''(0) \quad (19)$$

и характеристики безопасности

$$\gamma = \frac{\bar{\sigma}_{\text{пр}} - \bar{\sigma}_0}{\sqrt{\hat{\sigma}_{\text{пр}} + \hat{\sigma}_0 + \frac{\pi^4 E \bar{\sigma}_0^2}{(\pi^2 E - \bar{\sigma}_0 \lambda^2)^2} (\hat{\alpha} + \lambda^2 \hat{\beta})}}. \quad (20)$$

Вероятность разрушения V за срок службы T определяется по формуле из [2]:

$$V = 1 - \{0,5 + \Phi(\gamma)\} \exp \left[-\frac{T}{2\pi} \sqrt{\frac{-\hat{\sigma}_0''(0)}{\hat{\sigma}_{\text{пр}} + \hat{\sigma}_0 + \frac{\pi^4 E \bar{\sigma}_0^2}{(\pi^2 E - \bar{\sigma}_0 \lambda^2)^2} (\hat{\alpha} + \lambda^2 \hat{\beta})}} \exp \left(-\frac{\gamma^2}{2} \right) \right]. \quad (21)$$

Здесь корреляционная функция нагрузки принималась в виде:

$$\hat{\sigma}_0(\tau) = \hat{\sigma}_0 \exp(-x\tau^2). \quad (22)$$

При этом

$$\hat{\sigma}_0''(0) = -2x\hat{\sigma}_0. \quad (23)$$

Вводя значения

$$A_{\sigma_{\text{пр}}} = \frac{\sqrt{\hat{\sigma}_{\text{пр}}}}{\bar{\sigma}_{\text{пр}}}, \quad A_{\sigma_0} = \frac{\sqrt{\hat{\sigma}_0}}{\bar{\sigma}_0}, \quad C = \frac{\pi^2 E}{\bar{\sigma}_{\text{пр}}}, \quad \varphi = \frac{\bar{\sigma}_0}{\bar{\sigma}_{\text{пр}}}, \quad \xi = \frac{\bar{\sigma}_{\text{пр}}}{\bar{\sigma}_0} = \frac{1}{\varphi}, \quad (24)$$

получим:

$$\gamma = \frac{1 - \varphi}{\sqrt{A_{\sigma_{\text{пр}}}^2 + A_{\sigma_0}^2 \cdot \varphi^2 + \frac{c^2 \varphi^2}{(c - \lambda^2 \varphi)^2} (\hat{\alpha} + \lambda^2 \hat{\beta})}}, \quad (25)$$

$$V = 1 - \{0,5 + \Phi(\gamma)\} \exp \left[-\frac{T}{2\pi} \sqrt{\frac{2xA_{\sigma_0}^2 \varphi^2}{A_{\sigma_{\text{пр}}}^2 + A_{\sigma_0}^2 \cdot \varphi^2 + \frac{c^2 \varphi^2}{(c - \lambda^2 \varphi)^2} (\hat{\alpha} + \lambda^2 \hat{\beta})}} \exp \left(-\frac{\gamma^2}{2} \right) \right]. \quad (26)$$

Практические рекомендации по расчету.

С помощью уравнения (26) при заданных значениях $\hat{\alpha}$ и $\hat{\beta}$ построены графики за-

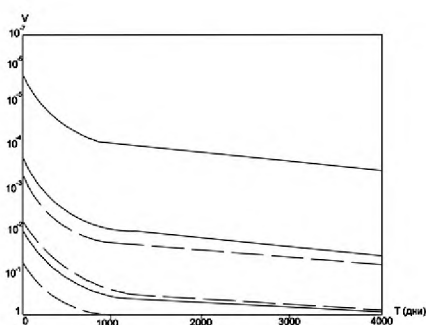


Рис. 2

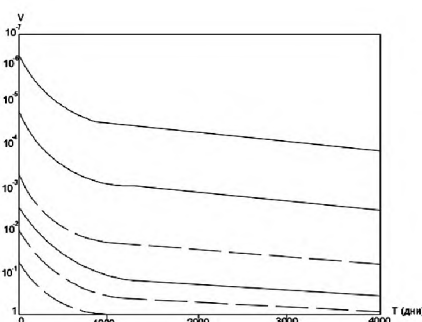


Рис. 3

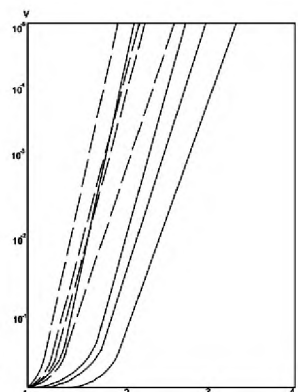


Рис. 4

Числовые параметры уравнения (26) для построения графиков приняты следующие:

- средний предел текучести стали Ст.3 $\sigma_T = 255$ МПа;

- модуль упругости $E = 2,1 \cdot 10^5$ МПа;

- изменчивость предела текучести $A_{\sigma_T} = 0,1$, что с некоторым округлением соответствует результатам, полученным при статистической обработке результатов испытания стали Ст.3;

- изменчивость внешней нагрузки $A_{\sigma_0} = 0,2$;

- коэффициент $u = 1$;

- параметр i равен отношению радиуса инерции к радиусу ядра поперечного сечения, для прямоугольного сечения будет $i = \sqrt{3}$;

- дисперсии относительных эксцентриситетов $\tilde{\alpha}$ приложения продольной силы к торцам стержня будут равны 0; 0,01; 0,05 и 0,1. Направление эксцентриситетов принято в сторону меньшего расстояния от центра тяжести сечения до крайних волокон;

- дисперсии начальных искривлений стержня $\tilde{\beta}$ принимались равными 0 и $3 \cdot 10^{-10}$, что соответствует случаю идеально прямолинейного стержня и условиям, при которых стандарт величины i равен $\sqrt{3}$.

На рис. 2...4 изображены кривые зависимости вероятности разрушения V от срока

зависимости V от T (рис. 2, 3), V (рис. 4). Имея в виду стальные стержни, предел прочности материала $\sigma_{пр}$ в них заменен на предел текучести.

службы стержня T при значениях изменчивостей $A_{\sigma_T} = 0,1$; $A_{\sigma_0} = 0,2$, дисперсии относительных эксцентриситетов $\hat{\alpha} = 0,01$; 0,05, дисперсия начальных искривлений стержня $\hat{\beta} = 0,3 \cdot 10^{-10}$, гибкость стержня $\lambda = 100, 125$ и коэффициент $\varphi = 0,2$; 0,3; 0,4.

ВЫВОДЫ

Вероятность разрушения V слабо зависит от сроков службы стержня T при переходе от $T = 2000$ дней к $T = 5000$ дней. Исключение представляют стержни с малым сроком службы, в течение 1000 дней, для которых вероятность разрушения может быть значительно снижена.

С увеличением коэффициента φ влияние начальных искривлений и относительных эксцентриситетов на вероятность разрушения все меньше и меньше.

На рис. 2, 3 представлены зависимости вероятности разрушения от коэффициента запаса ξ при $T = 0, 1000$ дней, $\hat{\alpha} = 0,01$; 0,05, $\hat{\beta} = 0,3 \cdot 10^{-10}$, $\lambda = 50, 90, 100, 125$, $A_{\sigma_T} = 0,1$, $A_{\sigma_0} = 0,2$.

Известно, что с увеличением гибкости стержня λ вероятность разрушения V также увеличивается при переходе коэффициента ξ от 2 к 3, а при малом размере коэффициента ξ 1-2 гибкость стержня слишком мало влияет на вероятность разрушения.

На рис. 3, 4 для сравнения показана гипербола Эйлера, определяющая критическую сжимающую силу для идеального центрированного и совершенно прямого стержня. Влияние искривления оси оказывается главным образом в правой половине графиков, то есть при большой гибкости стержней, а влияние внецентренного приложения силы – в малой части, где значения λ малы.

ЛИТЕРАТУРА

1. Амосов А.А., Малуль Р.М. Теория упругой устойчивости стержневых систем, пластин и оболочек. – М., 2010.
2. Рзаницын А.Р. Теория расчета строительных конструкций на надежность. – М., 1978.
3. Мкртычев О.В., Райзер В.Д. Теория надежности в проектировании строительных конструкций. – М., 2016.
4. Тамразян А.Г. Бетон и железобетон – взгляд в будущее // Вестник МГСУ. – 2014, №4. С.181...189.
5. Тамразян А.Г. Расчет внецентренно сжатых железобетонных элементов при динамическом нагружении в условиях огневых воздействий // Промышленное и гражданское строительство. – 2015, №3. С. 29...35.
6. Tamrazyan A. Reduce the Impact of Dynamic Strength of Concrete Under Fire Conditions on Bearing Capacity of Reinforced Concrete Columns // Applied Mechanics and Materials. – V. 475...476, 2014. P.1563...1566.
7. Тамразян А.Г., Аветисян Л.А. Расчет внецентренно сжатых железобетонных элементов на кратковременную динамическую нагрузку // Строительство: наука и образование. – 2013, № 4. С. 2.
8. Кабанцев О.В., Тамразян А.Г. Учет изменений расчетной схемы при анализе работы конструкции // Инженерно-строительный журнал. – 2014, № 5 (49). С. 15...26.
9. Тамразян А.Г. Оценка риска и надежности несущих конструкций и ключевых элементов – необходимое условие безопасности зданий и сооружений // Вестник ЦНИИСК им. В.А. Кучеренко "Исследования по теории сооружений". – 2009, № 1. С.160...171.
10. Tamrazyan A.G., Avetisyan L.A. Estimation of load bearing capacity of eccentrically compressed reinforced concrete elements under dynamic loading in fire conditions // Applied Mechanics and Materials. – Pt 1.V. 638...640, 2014. P. 62...65.
11. Baca Michal, Rybak J., Zyrek Tomasz, Tamrazyan A. Pile Foot Capacity Testing In Various Cases Of Pile Shaft Displacement // 16th International Multidisciplinary Scientific Geoconference, SGEM 2016: Science and Technologies in Geology, Exploration and Mining. – Vol I, 2016. P.945...950.

12. Tamrazyan A.G., Avetisyan L.A. Experimental and Theoretical Study of Reinforced Concrete Elements under Different Characteristics of Loading at High Temperatures // Procedia Engineering. – 153, 2016. P.721...725.

13. Tamrazyan A.G., Avetisyan L.A. Comparative analysis of analytical and experimental results of the strength of compressed reinforced concrete columns under special combinations of loads // MATEC Web of Conferences "5th International Scientific Conference "Integration, Partnership and Innovation in Construction Science and Education" (IPICSE). – V. 86, 2016.

14. Тамразян А.Г. Рекомендации к разработке требований к живучести зданий и сооружений // Вестник МГСУ. – 2011, № 2-1. С. 77...83.

15. Такаока Н., Шираки В. Анализ надежности элементов конструкции, состоящих из случайных компонентов, с использованием теории случайных процессов // Строительная механика. – 1212, 1984. С. 151...180.

REFERENCES

1. Amosov A.A., Malyul R.M. Teoriya uprugoy ustojchivosti sterzhnevyyh sistem, plastin i obolochek. – M., 2010.
2. Rzhanicyn A.R. Teoriya rascheta stroitelnyh konstrukcij na nadezhnost. – M., 1978.
3. Mkrtychev O.V., Rajzer V.D. Teoriya nadezhnosti v proektirovanii stroitelnyh konstrukcij. – M., 2016.
4. Tamrazyan A.G. Beton i zhelezobeton – vzglyad v budushee // Vestnik MGSU. – 2014, №4. S.181...189.
5. Tamrazyan A.G. Raschet vnecentrenno szhatyh zhelezobetonnyh elementov pri dinamicheskom nagruzenii v usloviyah ognevyyh vozdejstvij // Promyshlennoe i grazhdanskoe stroitelstvo. – 2015, №3. S. 29...35.
6. Tamrazyan A. Reduce the Impact of Dynamic Strength of Concrete Under Fire Conditions on Bearing Capacity of Reinforced Concrete Columns // Applied Mechanics and Materials. – V. 475...476, 2014. P.1563...1566.
7. Tamrazyan A.G., Avetisyan L.A. Raschet vnecentrenno szhatyh zhelezobetonnyh elementov na kratkovremennuyu dinamicheskuyu nagruzku // Stroitelstvo: nauka i obrazovanie. – 2013, № 4. S. 2.
8. Kabancev O.V., Tamrazyan A.G. Uchet izmene-nij raschetnoj shemy pri analize raboty konstrukcii // Inzhenerno-stroitelnyj zhurnal. – 2014, № 5 (49). S.15...26.
9. Tamrazyan A.G. Ocenka riska i nadezhnosti nesushih konstrukcij i klyuchevyh elementov – neobhodimoe uslovie bezopasnosti zdaniy i sooruzhenij // Vestnik CNIISK im. V.A. Kucherenko "Issledovaniya po teorii sooruzhenij". – 2009, № 1. S. 160...171.
10. Tamrazyan A.G., Avetisyan L.A. Estimation of load bearing capacity of eccentrically compressed reinforced concrete elements under dynamic loading in fire conditions // Applied Mechanics and Materials. – Pt 1.V. 638...640, 2014. P. 62...65.

11. Baca Michal, Rybak J., Zyrek Tomasz, Tamrazyan A. Pile Foot Capacity Testing In Various Cases Of Pile Shaft Displacement // 16th International Multidisciplinary Scientific Geoconference, SGEM 2016: Science and Technologies in Geology, Exploration and Mining. – Vol I, 2016. P.945...950.

12. Tamrazyan A.G., Avetisyan L.A. Experimental and Theoretical Study of Reinforced Concrete Elements under Different Characteristics of Loading at High Temperatures // Procedia Engineering. – 153, 2016. P.721...725.

13. Tamrazyan A.G., Avetisyan L.A. Comparative analysis of analytical and experimental results of the strength of compressed reinforced concrete columns under special combinations of loads // MATEC Web of

Conferences "5th International Scientific Conference "Integration, Partnership and Innovation in Construction Science and Education" (IPICSE). – V. 86, 2016.

14. Tamrazyan A.G. Rekomendacii k razrabotke trebovanij k zhivuchesti zdaniy i sooruzhenij // Vestnik MGSU. – 2011, № 2-1. S. 77...83.

15. Takaoka N., Shiraki V. Analiz nadezhnosti elementov konstrukcii, sostoyashih iz sluchajnyh komponentov, s ispolzovaniem teorii sluchajnyh processov // Stroitel'naya mehanika. – 1212, 1984. S.151...180.

Рекомендована кафедрой железобетонных и каменных конструкций НИМГСУ. Поступила 06.04.18.
