

УДК 677.4.074:539.4

**ИЗМЕНЕНИЯ И ДОПОЛНЕНИЯ
В ПРОЧНОСТНЫХ РАСЧЕТАХ ТКАНИ
С УЧЕТОМ МАСШТАБНОГО ЭФФЕКТА И НЕРАВНОМЕРНОСТИ
НИТЕЙ ПО ПРОЧНОСТИ**

**CHANGES AND ADDITIONS
IN CALCULATIONS OF A FABRIC
IN VIEW OF SCALE EFFECT AND NON-UNIFORMITY
OF THREAD ON STRENGTH**

В.П. ЩЕРБАКОВ, Н.С. СКУЛАНОВА, А.Е. ЦВЕТКОВА, С.Л. ХАЛЕЗОВ, С.А. ГОЛАЙДО
V.P. SCHERBAKOV, N.S. SKULANOVA, A.E. TSVETKOVA, S.L. KHALEZOV, S.A. GOLAI DO

(Российский государственный университет имени А.Н. Косыгина (Технологии. Дизайн. Искусство),
ОАО "Инновационный научно-производственный центр
текстильной и легкой промышленности",
Ивановский государственный политехнический университет)

(Russian State University named after A.N. Kosygin (Technologies. Design. Art),
Innovative Research and Production Centre for Textile and Light Industry, OJSC (Moscow),
Ivanovo State Polytechnical University)

E-mail: victor.scherbakow2012@yandex.ru

*Рассмотрено деформирование ткани при двухосном нагружении. Уста-
новлена связь напряжений и деформаций основы и утка с внешней нагрузкой
ткани. Методами нелинейной механики упругой нити определена уработка
основы и утка. Вычислена прочность ткани с учетом геометрических и ме-
ханических свойств нитей, масштабного эффекта и неравномерности ни-
тей по прочности.*

*Deformation of a fabric is described at loading. Communication of stress and
deformations of a basis and a duck with external loading of a fabric is established.
Strength of a fabric is calculated in view of scale effect and non-uniformity of thread
on strength.*

Ключевые слова: ткань, нить, основа, уток, растяжение, прочность, нап-
ряжение, деформация, неравномерность.

Keywords: fabric, string, basis, ducks, stretching, durability, pressure (volt-
age), deformation, non-uniformity.

В работах Kawabata, Niwa, Kawai [1], В.П. Щербакова [2], [3] изложена теория двухосного растяжения ткани, на основе которой разработана теория прочности ткани, учитывающая геометрические и механические свойства нитей, включая жесткость при растяжении и изгибе, структуру ткани, взаимодействие основы и утка. Теория была верна для любой отдельной ткани и довольно точно предсказывала прочность. Однако расчеты тканей различных плотностей показали, что теория является неполной. На отдельные противоречия было указано С.Д. Николаевым, чье имя хорошо и заслуженно известно. Чтобы понять суть дела, нужно изложить основные положения механизма разрушения ткани в соответствии с [1] и [2].

Здесь расчеты, уравнения и формулы теории проводятся на примере технической ткани, выработанной из высокомодульной нити Русар линейной плотности 29 текс. Жесткость при изгибе нити, определенная в условиях нагружения мертвым грузом по методике [2], [3], основанной на нелинейной механике упругих нитей, намного превышает жесткость обычных нитей и равна $H=9,82 \text{ сН} \cdot \text{мм}^2$.

$$F(k) - F(\alpha_0) = \omega, \quad k \sin \alpha_0 = \frac{\sqrt{2}}{2}, \quad \frac{y_1}{\ell_0} = 1 - \frac{2}{\omega} [F(k) - F(\alpha_0)], \quad \frac{x_1}{\ell_0} = \frac{2}{\omega} k \cos \alpha_0. \quad (1)$$

Здесь введены обозначения:

$$F(k) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\sqrt{1-k^2 \sin^2 \alpha}} d\alpha, \quad F(\alpha_0) = \int_0^{\alpha_0} \frac{1}{\sqrt{1-k^2 \sin^2 \alpha}} d\alpha, \quad \omega = \sqrt{\frac{P \ell_0^2}{H}}. \quad (2)$$

Для полноты и ясности изложения сразу приведем численные данные и результаты частных решений. При плотности ткани по основе $P_0=260$ нитей/дм и такой же плотности по утку координаты $x_1=0,192$ мм и $y_1=0,08$ мм. Вторая координата по величине отличается от диаметра исходной нити (0,21 мм). Действительно, диаметры нитей изменяются в деформированном состоянии из-за возникающих в них натяжений и, как следствие, сжимающих сил. Уменьшение δ диаметра нити при деформировании ткани –

В материаловедении ткани одним из основных параметров проектирования является уработка основы и утка. Для вычисления прочности ткани нас интересует лишь уработка основной нити a_0 . В любом методе проектирования эта величина выбирается или из эксперимента, или из справочника. Мы же найдем a_0 расчетным путем.

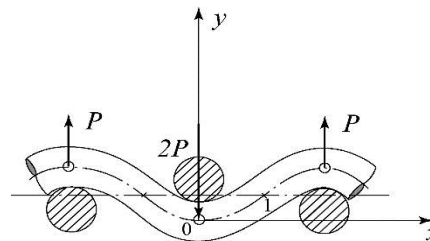


Рис. 1

Рассмотрим изгиб упругой нити на участке 01 (рис. 1 – схема изгиба нити в элементе ткани) [1], [4]. Длина осевой линии нити ℓ неизвестна и подлежит определению так же, как и угол φ между осью нити и нейтральной линией структуры в точке 1. Уравнения для вычисления четырех неизвестных ℓ , P , k , α_0 приведены в [1], [2]:

функция сжимающей силы F_s [1]. Кривая $\delta=\delta(F_s)$ приведена в [1]. Начиная с $F_s=50$ сН высота сечения нити почти не изменяется. При $F_s=50$ сН диаметр уменьшается на 0,05 мм, и $y_1=(0,21-0,05)/2=0,08$ мм. Значение F_s пока неизвестно, но, как будет показано позже, величина сжимающей силы даже в свободном состоянии ткани, то есть при отсутствии внешней нагрузки, превышает 50 сН. Длина осевой линии участка $01=\ell_0$ равна 0,211 мм. Тогда можно вычислить уработку основной нити:

$$a_o = \frac{\ell_o - x_1}{\ell_o} \cdot 100 = \frac{0,211 - 0,192}{0,211} \cdot 100 = 9,0 \%. \quad (3)$$

Следовательно, используя только геометрические параметры ткани (плотность по основе и утку) и свойства нити (жесткость при изгибе), не прибегая к опытным данным, получена величина уработки нити.

Угол φ наклона касательной в концевой точке 1:

$$\varphi = 2 \arcsin k - \frac{\pi}{2} = 0,585 \text{ рад} = 33,5^\circ. \quad (4)$$

Рассматривая двухосное растяжение ткани, прежде всего отметим, что изложенная здесь теория упругих нитей неприменима, поскольку в качестве одной из основных гипотез этой теории полагается нерастяжимость оси нити. Но как в ткачестве, так и при одноосном растяжении нитей основы и утка нити деформируются, одни в малой степени – $\approx 1\%$, другие значительно – $\approx 20\%$. Чтобы учесть растяжение нитей, изменим модель элемента ткани. Примем во внимание, что натяжение нити, возникающее при нагружении ткани, выпрямляет изогнутую нить. Тогда нити основы и утка представим в форме прямых линий с точкой пересечения в центре перекрытия нитей (рис. 2 – взаимодействие основы и утка) при прежней длине ℓ_0 и том же шаге элемента ткани, определяемом плотностью ткани по основе P_o и утку P_y (число нитей на 10 дециметров):

$$t_{o1} = \frac{100}{P_y}, \quad t_{o2} = \frac{100}{P_o}. \quad (5)$$

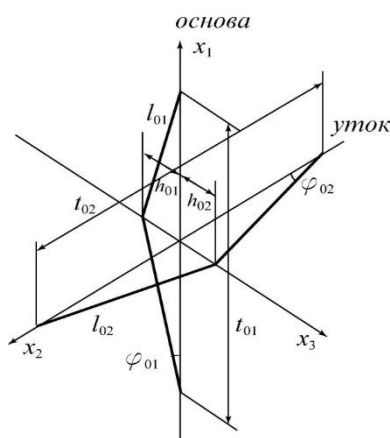


Рис. 2

В дальнейшем индекс 0 соответствует недеформированному состоянию, индекс 1 – величине, относящейся к нитям основы, индекс 2 – к нитям утка.

Полное представление о свойствах нити при одноосном растяжении дает диаграмма растяжения. Опытные данные напряжения σ , ГПа и деформации ε аппроксимированы степенной функцией $\sigma = E\varepsilon^m$ методами численной оптимизации. Решением являются $E = 52,756$ ГПа и $m = 0,929$.

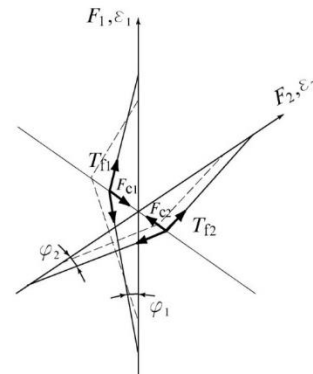


Рис. 3

На границах ткани действует растягивающая сила f_i ($i=1,2$). Если на длину ткани приходится n_i нитей, то на конце одной нити по оси x_i действует сила $F_i = f_i/n_i$ (рис. 3 – силовое взаимодействие нитей). При растяжении ткани по обеим осям в нитях возникает натяжение T_{fi} , связанное с силой, действующей на ткань, зависимостью:

$$F_i = T_{fi} \cos \varphi_i, \quad (6)$$

где φ_i – угол между осью нити и нейтральной линией структуры в деформированном состоянии.

При моделировании растяжения ткани полагаем, что расстояния между нитью основы и нитью утка на линии их контакта сохраняются постоянными при условии неизменяемых поперечных размеров нитей:

$$h_1 + h_2 = h_{o1} + h_{o2}. \quad (7)$$

При нагружении ткани уток смещается в направлении толщины ткани, то есть по

оси x_3 . Конечное расположение нитей изображено на рис. 3 сплошной линией. В результате изменения натяжения обеих систем нитей устанавливается то или иное расположение основы и утка, характеризующееся величиной соотношения амплитуд волн изгиба основной и уточной нити. Этот показатель – порядок фазы строения (ПФС) – является одним из важнейших в структуре ткани. Излагаемая здесь теория прочности ткани позволяет проектировать ткани и по ПФС.

Натяжение нити линейной плотности T_i определяется ее деформацией в соответствии с выражением $\sigma = E \varepsilon^m$:

$$T_{fi} = E_i \varepsilon_{fi}^m \frac{T_i}{\rho_i}. \quad (8)$$

Деформация ткани ε_i связана с деформацией нити ε_{fi} зависимостью:

$$\varepsilon_{fi} = \frac{\ell_i}{\ell_{oi}} - 1 = \frac{t_{oi}}{2} \sqrt{\left(\frac{2h_i}{t_{oi}}\right)^2 + (1 + \varepsilon_i)^2} - 1. \quad (9)$$

Выше отмечено, что для описания растяжения основы и утка реальная структура ткани заменяется моделью, в которой оси основы и утка – прямые линии с точкой пересечения в центре перекрытия нитей. Форма и длина нити в структурном элементе уже определены в первой части работы, где рассматривалось свободное состояние тка-

ни. Только для этого и потребовалась геометрически нелинейная теория упругих нитей. Эта нить длиной $\ell_{oi} = 0,211$ мм растягивается при нагружении ткани. При начальной длине нити ℓ_{oi} и шаге структурного элемента t_{oi} вычисляется расстояние между нейтральной линией ткани и осью нити вдоль

оси x_3 в точке перегиба: $h_{oi} = \sqrt{\ell_{oi}^2 - \left(\frac{t_{oi}}{2}\right)^2} = 0,085$ мм. Нить утка находится в равновесии под действием сил натяжения T_{t2} и реакции N нити основы, направленной по оси x_3 в области контакта нитей основы и утка. На нить основы действует реакция N' нити утка, равная по модулю и направленная противоположно силе N . Обе реакции уравновешиваются силами давления нитей друг на друга, которые сжимают нити и вызывают смещение обеих систем нитей по оси x_3 (рис. 3). В деформированном состоянии $h_2 = h_{oi} + h_{o2} - h_1$. Сжимающая сила связана с натяжением нити соотношением $F_{ci} = 2T_{fi} \sin \varphi_i$. Здесь

$$\sin \varphi_i = \frac{h_i}{\sqrt{h_i^2 + \left[\frac{(1 + \varepsilon_i)t_{oi}}{2}\right]^2}} = \frac{2h_i/t_{oi}}{\sqrt{\left(\frac{2h_i}{t_{oi}}\right)^2 + (1 + \varepsilon_i)^2}}. \quad (10)$$

Из равенства $F_{c1} = F_{c2}$ и соотношений (9) получаем выражение для определения h_1 , ε_{f1} , ε_{f2} :

$$\left(E_1 \varepsilon_{f1}^m \frac{T_1}{\rho_1} \right) \frac{4h_1/t_{o1}}{\sqrt{\left(\frac{2h_1}{t_{o1}}\right)^2 + (1 + \varepsilon_1)^2}} = \left(E_2 \varepsilon_{f2}^m \frac{T_2}{\rho_2} \right) \frac{4(h_{o1} + h_{o2} - h_1)/t_{o2}}{\sqrt{\left(\frac{2(h_{o1} + h_{o2} - h_1)}{t_{o2}}\right)^2 + (1 + \varepsilon_2)^2}}. \quad (11)$$

С учетом

$$\varphi_i = \arctg \left[\frac{2h_i}{(1 + \varepsilon_i)t_{oi}} \right] \quad (12)$$

определяем растягивающую ткань силу F_i :

$$F_i = T_{fi} \cos \varphi_i. \quad (13)$$

Для примера рассмотрим растяжение ткани в направлении основы при фиксированной деформации в направлении утка. В данном случае ε_2 остается равным нулю при растяжении ткани. Если не фиксировать кромку ткани, то кромка примет криволинейную форму. Это уже другая задача. Предельной деформации нити основы $\varepsilon_{f1} = 0,029$ соот-

ветствует деформация ткани $\varepsilon_1=0,057$. При этом натяжение нити основы становится равным $T_{f1}=E_1\varepsilon_1^{m_1}\frac{T}{\rho}=63,39$ Н. Угол между координатной осью x_1 и нитью основы при $h_1=-0,074$ мм принимает значение $\varphi_1=\arctg\left[\frac{2h_1}{(1+\varepsilon_1)t_{01}}\right]=0,349$ рад. Теперь по формуле (13) можно вычислить прочность ткани в пересчете на одну нить основы $F_1=T_{f1}\cos\varphi_1=59,58$ Н. Экспериментальное значение этой характеристики равно $F_1=60,1$ Н.

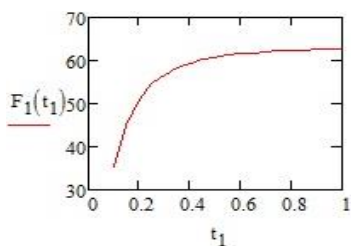


Рис. 4

Считается, что если хотя бы одно новое наблюдение не согласуется с теорией, нам приходится либо отказаться от нее, либо переделать. В начале статьи было сказано, что теория довольно точно предсказывала прочность для любой конкретной ткани. Однако расчеты тканей различных плотностей показали, что изложенная выше теория является неполной. Это видно из графика зависимости прочности ткани от расстояния между осями соседних уточных нитей t_1 или от длины полуволны изгиба основы ℓ_1 (рис. 4 – зависимость прочности ткани от шага t_1 (теория [1], [2])). Учитывая, что шаг обратно пропорционален плотности ткани по утку (см. формулу (5)), получаем увеличение прочности ткани с уменьшением плотности. При этом резкое изменение прочности происходит как раз в рассматриваемой нами области плотности ткани по утку. Именно здесь опыт противоречит предсказаниям теории. Тогда дополним теорию [1], [2], принимая во внимание механизм разрушения ткани в предельном состоянии.

При разрыве ткани поверхность разрыва представляет собой уточную нить, сверху и снизу которой выступают кончики обор-

ванных основных нитей. В каждом перекрытии ткани перед обрывом действуют сжимающие силы величиной свыше 43 сН. При данной плотности по основе в испытуемой полоске ткани 130 нитей основы. Такое большое усилие давления нитей друг на друга создает устойчивую структуру ткани, ее способность сопротивляться внешним воздействиям. Поэтому можно предположить, что обрыв нитей происходит на участках, свободных от внешней нагрузки, то есть на отрезке, равном шагу t_1 . Нить длиной t_1 имеет значительно большую прочность, чем при стандартной длине ℓ_0 . Зависимость средней прочности нити P от длины образца ℓ выражается формулой [2]:

$$P(\ell)=p_w\left(\frac{\ell_0}{\ell}\right)^{\frac{1}{\alpha}}\Gamma\left(1+\frac{1}{\alpha}\right). \quad (14)$$

Здесь ℓ_0 – стандартная длина нити при испытаниях; p_w , α – параметры распределения Вейбулла; $\Gamma(x)$ – гамма-функция.

Формула (14) описывает масштабный эффект. Вычислим $P(t_1)$, предварительно определив параметры p_w , α . Они находятся из уравнений, выражающих среднюю прочность \bar{P} и дисперсию D прочности при стандартной длине испытаний:

$$\bar{P}(\ell_0)=p_w\Gamma\left(1+\frac{1}{\alpha}\right), \quad (15)$$

$$D(\ell_0)=p_w^2\left[\Gamma\left(1+\frac{2}{\alpha}\right)-\Gamma^2\left(1+\frac{1}{\alpha}\right)\right].$$

Подставляя в (15) $\bar{P}=63,39$ Н и $D=10,046$ Н² при квадратической неровноте $C = 5\%$, получим $\alpha = 24,95$; $p_w = 64,791$. Длина основы в элементе ткани при разрыве ткани (расчетная величина разрывной деформации ткани $\varepsilon_1=0,057$ при экспериментальной деформации нити $\varepsilon_{f1} = 0,029$) становится равной $\ell = 0,422$ мм. Относительно формулы (14) надо сказать, что экстраполяция прочности на малые разрывные длины, основанная на распределении Вейбулла, не очень надеж-

на. Это связано с недостаточно точным описанием распределения прочности комплексных нитей распределением Вейбулла. Поэтому испытания нитей проведены при длине $l_0 = 50$ мм. Тогда в соответствии с формулой (14) прочность $\bar{P}(0,422)$ принимает значение 76,76 Н.

Прочность нитей имеет случайную природу. Механизм разрушения ткани представляет собой последовательный разрыв основных нитей, сначала наиболее слабых, а затем, после обрыва одной нити, перераспределение нагрузки на остальные $(m-1)$ нити. Нагрузка на оставшиеся нити увеличивается, и далее разрушение будет происходить по описанной схеме. Прочность m однонаправленных нитей P_{\max} оказывается ниже средней прочности $m\bar{P}(0,422)$, и эта разница прочности увеличивается с ростом коэффициента вариации прочности нитей. Максимальная прочность всех нитей основы определяется в соответствии с выражением:

$$P_{\max} = km\bar{P}(0,422),$$

где $k = \frac{(\alpha\epsilon)^{-\frac{1}{\alpha}}}{\Gamma\left(1 + \frac{1}{\alpha}\right)}$ – коэффициент реализации

прочности основных нитей в ткани [2]. В нашем случае $k = 0,683$.

При плотности ткани по основе 260 нитей на 100 мм в образце шириной 50 мм содержится 130 нитей. Теперь по формуле

$$F_{\text{ткани}}^* = km\bar{P}(0,422)\cos\varphi_1 \quad (16)$$

можно вычислить прочность ткани:

$$F_{\text{ткани}}^* = 8,1 \cdot 10^3 \text{ Н.}$$

В пересчете на одну нить это составляет 62,28 Н. Как уже было отмечено, экспериментальное значение этого показателя $F_{1\text{-ткани}}^* = 60,1$ Н.

На рис. 5 (зависимость прочности ткани от длины основы в элементе ткани (по уточненной теории)) показано уменьшение прочности ткани в зависимости от увеличения ша-

га между уточинами, то есть от уменьшения плотности ткани по утку.

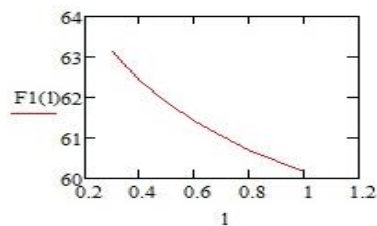


Рис. 5

ВЫВОДЫ

Изложенная здесь новая теория является расширением предыдущей. Также обстоит дело с введением масштабного фактора и учетом неравномерности основных нитей по прочности. Проведенный эксперимент не входит в противоречие с теорией. Она достаточно точно описывает широкий класс наблюдений в рамках модели, содержащей лишь несколько произвольных элементов.

ЛИТЕРАТУРА

1. Kawabata S., Niwa M., Kawai H. // J. Text. Inst., 64, (7.3.1973) 21.
2. Щербаков В.П. Прикладная и структурная механика волокнистых материалов. – М.: "Тисо Принт", 2013.
3. Щербаков В.П., Болотный А.П., Фомин Б.М. Проектирование ткани методами структурной механики // Изв. вузов. Технология текстильной промышленности. – 2011, № 2. С. 107...113.
4. Щербаков В.П., Скуланова Н.С. Основы теории деформирования и прочности текстильных материалов. – М.: МГТУ имени А.Н. Косыгина, 2008.

REFERENCES

1. Kawabata S., Niwa M., Kawai H. // J. Text. Inst., 64, (7.3.1973) 21.
2. Shcherbakov V.P. Prikladnaya i strukturnaya mekhanika voloknistykh materialov. – M.: "Tiso Print", 2013.
3. Shcherbakov V.P., Bolotnyy A.P., Fomin B.M. Proektirovanie tkani metodami strukturnoy mekhaniki // Izv. vuzov. Tekhnologiya tekstil'noy promyshlennosti. – 2011, № 2. S. 107...113.
4. Shcherbakov V.P., Skulanova N.S. Osnovy teorii deformirovaniya i prochnosti tekstil'nykh materialov. – M.: MGTU imeni A.N. Kosygina, 2008.

Рекомендована кафедрой текстильных технологий РГУ имени А.Н. Косыгина. Поступила 27.11.18.