

УДК 624.072

**ИСПОЛЬЗОВАНИЕ МЕТОДА
ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНЫХ АППРОКСИМАЦИЙ
ДЛЯ РАСЧЕТА БАЛОК ИЗ НЕЛИНЕЙНО-УПРУГОГО МАТЕРИАЛА**

**USING THE METHOD
OF SEQUENTIAL APPROXIMATIONS
FOR THE CALCULATION OF BEAMS
FROM A NONLINEAR-ELASTIC MATERIAL**

М.В. АЛЕКСАНДРОВСКИЙ

M.V. ALEKSANDROVSKIY

(Национальный исследовательский Московский государственный строительный университет)

(National Research Moscow State University of Civil Engineering)

E-mail: stroitmech@mgsu.ru; AleksandrovskiyMV@mgsu.ru

Значительная часть современных строительных материалов, нашедших применение при строительстве, в том числе и объектов текстильной промышленности, не подчиняются закону Гука. В статье представляем алгоритм расчета балок симметричного сечения, выполненных из нелинейно-упругого материала. Зависимость между напряжениями и деформациями описывается кубической параболой, которая хорошо аппроксимирует экспериментальную кривую и обеспечивает симметричность диаграммы относительно растяжения-сжатия. Для решения исходного нелинейного диф-

ференциального уравнения, используется метод последовательных приближений. Применение метода последовательных аппроксимаций позволяет свести систему дифференциальных уравнений, описывающих напряженно-деформированное состояние балки в каждом приближении, к системе алгебраических уравнений.

A significant part of modern building materials, which have found application in the construction, including textile industry, are not subject to the law of Hooke's. In this paper, we present the algorithm for calculating the beams of a symmetric section made of a nonlinear elastic material. The dependence between tensile stresses and deformations is described by a cubic parabola, which approximates the experimental curve well and ensures the symmetry of the tension-compression diagram. To solve the original nonlinear differential equation, the method of successive approximations is used. The application of the method of successive approximations makes it possible to reduce the system of differential equations describing the stress-strain state of the beam in each approximation to the system of algebraic equations.

Ключевые слова: алгоритм расчета, нелинейно-упругий материал, нелинейное дифференциальное уравнение, метод последовательных аппроксимаций, система алгебраических уравнений.

Keywords: calculation algorithm, nonlinear-elastic material, nonlinear differential equation approximation by a cubic parabola, the method of successive approximations, system of the algebraic equations.

В связи с модернизацией предприятий текстильной промышленности и широким применением композитных материалов все большую актуальность приобретают вопросы, связанные с определением напряжений и деформаций конструкций за пределом упругости.

Многие современные строительные материалы или совсем не подчиняются закону Гука, или следуют ему при напряжениях, значительно меньших предела прочности. Задачи, в которых закон Гука заменяется нелинейными зависимостями между напряжениями и деформациями, и относящиеся к ним вопросы рассмотрены, например, в работах [1...9].

Для расчета конструкций из нелинейно-упругого материала экспериментальные зависимости между напряжениями и деформациями описываются с помощью аналитических выражений. Различными исследователями был представлен ряд вариантов аппроксимации диаграммы деформирования $\sigma - \varepsilon$. Одной из самых простых зависимостей, связывающих напряжения и деформа-

ции, но в то же время, хорошо аппроксимирующей экспериментальную кривую, является кубическая парабола [5]. Она обеспечивает симметричность диаграммы $\sigma - \varepsilon$ относительно растяжения-сжатия, а при деформациях, стремящихся к нулю, переходит в закон Гука.

В представленной работе рассматривается расчет балки симметричного сечения, выполненной из нелинейно-упругого материала, для которого зависимость между напряжениями и деформациями аппроксимируется кубической параболой.

Напряженно-деформируемое состояние балки описывается двумя дифференциальными уравнениями второго порядка. Для решения нелинейного дифференциального уравнения, связывающего изгибающий момент и перемещения, используется метод последовательных аппроксимаций (МПА), идеи которого изложены в [10] и [11], что в конечном итоге приводит к системе линейных алгебраических уравнений, решение которых удобно проводить методом Зейделя [12].

Кубическую параболу, описывающую диаграмму $\sigma - \varepsilon$ для одноосного напряженного состояния, можно представить в следующем виде:

$$\sigma = A_1 \sigma - A_3 \varepsilon^3, \quad (1)$$

где σ и ε – продольное напряжение и деформация соответственно. Коэффициенты A_1 и A_3 , имеющие размерность напряжения, можно определить различными способами, в зависимости от поставленной задачи и конкретной экспериментальной кривой. Несколько вариантов для их определения представлены в работах [3] и [5].

В соответствии с гипотезой плоских сечений продольная деформация волокна, отстоящего на расстоянии z от нейтрального слоя, равна $\delta_z = \frac{z}{\rho}$, где ρ – радиус кривизны.

На рис. 1 показано прямоугольное поперечное сечение и соответствующая (1) эпюра напряжений, исходя из которой, изгибающий момент в сечении определяется следующим образом:

$$M = A_1 \frac{J_2}{\rho} - A_3 \frac{J_4}{\rho^3}, \quad (2)$$

$$\text{где } J_2 = \int_F z^2 dF = \frac{bh^3}{12}; \quad J_4 = \int_F z^4 dF = \frac{bh^5}{80}. \quad (3)$$

Здесь F – площадь поперечного сечения; b и h – высота и ширина сечения.

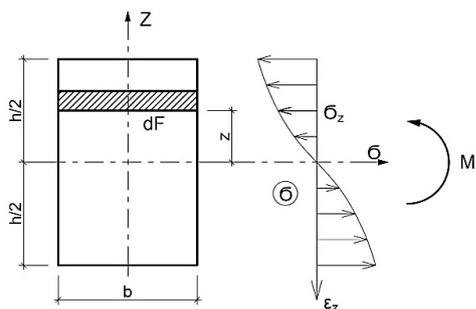


Рис. 1

Воспользовавшись известным выражением для кривизны оси балки $1/\rho = -d^2y/dx^2$, где y – вертикальные перемещения, и введя новую переменную:

$$v = A_1 J_2 y, \quad (4)$$

представим уравнение в виде:

$$\frac{d^2v}{dx^2} = -M + \alpha \left(\frac{d^2v}{dx^2} \right)^3, \quad (5)$$

$$\text{где } \alpha = \frac{A_3 J_4}{(A_1 J_2)^3}.$$

Как известно, уравнение равновесия элемента балки имеет вид:

$$\frac{d^2M}{dx^2} = -q(x), \quad (6)$$

где $q(x)$ – поперечная нагрузка.

Для определения изгибающих моментов и прогибов необходимо совместное решение дифференциальных уравнение (5) и (6) с учетом граничных условий.

Введя обозначения

$$\frac{dv}{dx} = \varphi; \quad \frac{d^2v}{dx^2} = \frac{d\varphi}{dx} = t, \quad (7)$$

$$\frac{dM}{dx} = \theta; \quad \frac{d^2M}{dx^2} = \frac{d\theta}{dx} = f, \quad (8)$$

представим уравнения (5) и (6) в следующем виде:

$$t = -M + \alpha t^3, \quad (9)$$

$$f = -q. \quad (10)$$

Для решения уравнения (9), нелинейного относительно t , используется метод последовательных приближений. В этом случае K -е приближение можно представить в виде:

$$t_{(K)} = -R_{(K)}, \quad (11)$$

$$\text{где } R_{(K)} = M_{(K)} + \gamma_{(K)}, \quad \gamma_{(K)} = \alpha R_{(K-1)}^3. \quad (12)$$

Следует отметить, что в качестве первого приближения берется линейное решение. Тогда $t_{(1)} = -M_{(1)}$ и $\gamma_{(1)} = 0$.

Совместные решения уравнений (10) и (11) для K -го приближения приводится с помощью МПА [10]. Пролет балки разбива-

ется на n элементов длиной δ (рис. 2 – расчетная схема балки под нагрузкой), в пределах которых распределенная нагрузка постоянна, а на их границах приложены вертикальные сосредоточенные силы Φ_i . Номер каждого элемента определяется номером правого узла.

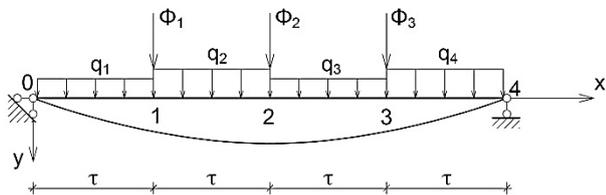


Рис. 2

Получим разрешающее уравнение МПА для уравнения (11), отбросив на время индекс "К". Рассмотрим отдельный элемент длиной τ со вспомогательными индексами, представленный на рис. 3 (расчетная схема балки под нагрузкой).

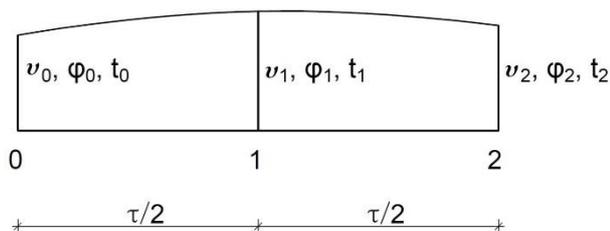


Рис. 3

В соответствии с МПА каждая функция в пределах элемента аппроксимируется кубической параболой, а ее производная – квадратной. Тогда $v(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3$. Для определения a_i используются значения функций v_0, v_1, v_2 , а также ее производной φ_0 . Значения производной в точках 1 и 2 в этом случае будут равны:

$$\varphi_1 = -\frac{\varphi_0}{2} + \frac{2}{\tau} \left(-\frac{5}{4}v_0 + v_1 + \frac{1}{4}v_2 \right), \quad (13)$$

$$\varphi_2 = -\varphi_0 + \frac{2}{\tau} (2v_0 - 4v_1 + 2v_2).$$

Так как в соответствии с МПА функция φ также аппроксимируется кубической параболой, то значения $t = d\varphi/dx$ в точках 1 и 2 можно получить из (13) с заменой v на φ и φ на t . Подставив затем полученные выражения в (13), выразим t_i через v_i следующим образом:

$$t_1 = -\frac{t_0}{2} - \frac{2}{\tau} \varphi_0 + \frac{3}{\tau^2} (v_2 - v_0), \quad (14)$$

$$t_2 = t_0 - \frac{12}{\tau} \varphi_0 + \frac{12}{\tau} (3v_0 - 4v_1 - v_2).$$

Запишем уравнение (11) для точек 0, 1, 2. Тогда:

$$t_0 = -R_0, \quad t_1 = -R_1, \quad t_2 = -R_2. \quad (15)$$

Решив полученную с учетом (14), систему уравнений относительно φ_0 и v_1 , выразим эти величины через v_0 и v_2 следующим образом:

$$\varphi_0 = \frac{1}{\tau} (v_2 - v_0) + \frac{\tau}{6} (R_0 + 2R_1), \quad (16)$$

$$v_1 = \frac{1}{\tau} (v_2 + v_0) + \frac{\tau}{48} (R_0 + 4R_1 + R_2). \quad (17)$$

Подставив (16) и (17) в (13), получим:

$$\varphi_1 = \frac{1}{\tau} (v_2 - v_0) + \frac{\tau}{24} (R_2 - R_0), \quad (18)$$

$$\varphi_2 = \frac{1}{\tau} (v_2 - v_0) + \frac{\tau}{6} (2R_1 + R_2). \quad (19)$$

Рассмотрим два соседних элемента, представленных на рис. 4 (эпюры функций φ и Q для i -го и $(i+1)$ -го элементов).

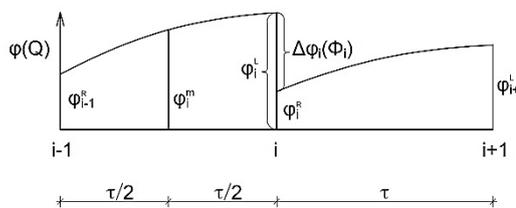


Рис. 4

Заменим в полученных ранее формулах индексы – "0" на "(i-1)" и "2" на "i". Верхние индексы "R" и "L" здесь указывают на значение функции в узле справа и слева, а индекс "m" – в середине элемента.

При отсутствии сосредоточенных моментов и промежуточных шарниров

$$\varphi_{i(K)}^L = \frac{1}{\tau} (v_{i(K)} - v_{i-1(K)}) - \frac{\tau}{6} (M_{i-1(K)} + 2M_{i(K)} + \frac{\tau^2}{4} q_i + 2\gamma_{i(K)}^m + \gamma_{i(K)}), \quad (20)$$

$$\varphi_{i(K)}^R = \frac{1}{\tau} (v_{i+1(K)} - v_{i(K)}) + \frac{\tau}{6} (2M_{i(K)} + M_{i+1(K)} + \frac{\tau^2}{4} q_{i+1} + \gamma_{i(K)} + 2\gamma_{i+1(K)}^m). \quad (21)$$

В связи с одинаковой структурой уравнений (10) и (11) путем замены v на M , φ на Q , и R на q представим уравнения (19), (16) и (17) в следующем виде:

$$Q_{i(K)}^L = \frac{1}{\tau} (M_{i(K)} - M_{i-1(K)}) - \frac{\tau}{2} q_i, \quad (22)$$

$$Q_{i(K)}^R = \frac{1}{\tau} (M_{i+1(K)} - M_{i(K)}) + \frac{\tau}{2} q_{i+1}, \quad (23)$$

$$-M_{i-1(K)} + 2M_{i(K)} - M_{i+1(K)} = \tau q_i + \frac{\tau^2}{2} (q_i + q_{i+1}), \quad (25)$$

$$-v_{i-1(K)} + 2v_{i(K)} - v_{i+1(K)} = \frac{\tau^2}{6} \left[M_{i-1(K)} + 4M_{i(K)} + M_{i+1(K)} + \frac{\tau^2}{4} (q_i + q_{i+1}) + 2(\gamma_{i(K)}^m + \gamma_{i(K)} + \gamma_{i+1(K)}^m) \right]. \quad (26)$$

Уравнения (25) и (26) записываются для всех внутренних точек, что приводит к системе $2(n-1)$ уравнений. К основным уравнениям нужно добавить граничные условия, для составления которых можно использовать выражения (20)...(23).

ВЫВОДЫ

1. Таким образом, для решения нелинейного дифференциального уравнения, связывающего изгибающие моменты и перемещения, используется метод последовательных приближений. Применение МПА позволяет свести систему дифференциальных уравнений, описывающих напряженно деформированное состояние балки в каждом приближении, к системе алгебраических уравнений, для решения которой удобно использовать метод Зейделя. Следует

$M_{i(K)}^L = M_{i(K)}^R$ и $\varphi_{i(K)}^L = \varphi_{i(K)}^R$. Используя (19) и (16), в соответствии с новыми обозначениями, а также с учетом (12), представим выражения для $\varphi_{i(K)}^L$ и $\varphi_{i(K)}^R$ для каждого приближения в следующем виде:

$$M_{i(K)}^m = \frac{1}{2} (M_{i-1(K)} - M_{i(K)}) - \frac{\tau^2}{8} q_i. \quad (24)$$

Вычитая (23) из (22), с учетом того, что $Q_{i(K)}^L - Q_{i(K)}^R = \varphi_i$, и приравнявая (20) и (21), представим разрешающие уравнения для определения изгибающих моментов и прогибов в следующем виде:

отметить, что МПА дает более точное решение по сравнению с методом обобщенных конечных разностей [7] при меньшем числе элементов, на которые разбивается пролет балки.

2. Примером систем, для которых может быть использован представленный алгоритм расчета, могут быть балочные элементы строительных конструкций используемых в сооружениях текстильной промышленности. Работу, по нашему мнению, можно рассматривать как некоторый вклад в развитие методов расчета конструкций, выполненных из нелинейного упругого материала.

ЛИТЕРАТУРА

1. Бондарь Н.Г. Нелинейные автономные задачи механики упругих систем. – Киев: Будівельник, 1971.

2. Безухов Н.И. Основы теории упругости, пластичности и ползучести. – М.: Высшая школа, 1968.
3. Лукаш П.А. Основы нелинейной строительной механики. – М.: Стройиздат, 1978.
4. Цурпал И.А. Расчет элементов конструкций из нелинейно упругих материалов. – Киев: Техника, 1976.
5. Петров В.В., Кривошеин И.В. Методы расчета конструкций из нелинейно-деформируемого материала. – М.: Изд-во АВС, 2009.
6. Тамразян А.Г., Фаликман В.Р. Основные требования к проектированию железобетонных конструкций по модельному кодексу ФИБ // Строительство и реконструкция. – 2016, № 3 (65). С. 71...77.
7. Тамразян А.Г., Ковальчук О.А. Матрица влияния модели суперэлемента прямого стержня с поперечными трещинами на динамическое состояние упругих и линейно-вязкоупругих тел // Вестник НИЦ Строительство. – 2011, № 3-4. С. 120...130.
8. Тамразян А.Г. Особенности работы высотных зданий // Жилищное строительство. – 2004, № 3. С.19...20.
9. Тамразян А.Г. Особенности расчета изгибаемых железобетонных элементов прямоугольного сечения согласно EC2 // Бетон и железобетон. – 2012, № 1. С. 19.
10. Габбасов Р.Ф. К расчету стержней и стержневых систем методом последовательных аппроксимаций // Изв. вузов. Строительство и архитектура. – 1980, №4. С. 30...35.
11. Габбасов Р.Ф., Габбасов А.Р., Филатов В.В. Численное построение разрывных решений задач строительной механики. – М.: Изд-во АСВ, 2008.
12. Корн Г., Корн Т. Справочник по математике. – М.: Наука, 1984.
1. Bondar' N.G. Nelineynye avtonomnye zadachi mekhaniki uprugikh sistem. – Kiev: Budivel'nik, 1971.
2. Bezukhov N.I. Osnovy teorii uprugosti, plasticnosti i polzuchesti. – M.: Vysshaya shkola, 1968.
3. Lukash P.A. Osnovy nelineynoy stroitel'noy mekhaniki. – M.: Stroyizdat, 1978.
4. Tsurpal I.A. Raschet elementov konstruksiy iz nelineyno uprugikh materialov. – Kiev: Tekhnika, 1976.
5. Petrov V.V., Krivoshein I.V. Metody rascheta konstruksiy iz nelineyno-deformiruемого материала. – M.: Izd-vo AVS, 2009.
6. Tamrazyan A.G., Falikman V.R. Osnovnye trebovaniya k proektirovaniyu zhelezobetonnykh konstruksiy po model'nomu kodeksu FIB // Stroitel'stvo i rekonstruktsiya. – 2016, № 3 (65). S. 71...77.
7. Tamrazyan A.G., Koval'chuk O.A. Matritsa vliyaniya modeli superelementa pryamogo sterzhnya s poperechnymi treshchinami na dinamicheskoe sostoyanie uprugikh i lineyno-vyazkouprugikh tel // Vestnik NIT'stvo. – 2011, № 3-4. S. 120...130.
8. Tamrazyan A.G. Osobennosti raboty vysotnykh zdaniy // Zhilishchnoe stroitel'stvo. – 2004, № 3. S.19...20.
9. Tamrazyan A.G. Osobennosti rascheta izgibaemykh zhelezobetonnykh elementov pryamougol'nogo secheniya soglasno EC2 // Beton i zhelezobeton. – 2012, № 1. S. 19.
10. Gabbasov R.F. K raschetu sterzhney i sterzhnevnykh sistem metodom posledovatel'nykh approksimatsiy // Izv. vuzov. Stroitel'stvo i arkhitektura. – 1980, №4. S. 30...35.
11. Gabbasov R.F., Gabbasov A.R., Filatov V.V. Chislennoe postroenie razryvnykh resheniy zadach stroitel'noy mekhaniki. – M.: Izd-vo ASV, 2008.
12. Korn G., Korn T. Spravochnik po matematike. – M.: Nauka, 1984.

Рекомендована кафедрой железобетонных и каменных конструкций. Поступила 28.09.19.