

УДК 531.677

**ОСТАТОЧНАЯ КРИВИЗНА И ОСТАТОЧНЫЕ НАПРЯЖЕНИЯ
ПРИ ИЗГИБЕ УПРУГОПЛАСТИЧЕСКОЙ НИТИ**

**RESIDUAL CURVATURE AND RESIDUAL STRESS
AT A BEND OF AN ELASTIC-PLASTIC STRING**

В.П. ЩЕРБАКОВ, Н.С. СКУЛАНОВА, Т.И. ПОЛЯКОВА, С.Л. ХАЛЕЗОВ

V.P. SCHERBAKOV, N.S. SKULANOVA, T.I. POLJAKOVA, S.L. KHALEZOV

(Российский государственный университет имени А.Н. Косыгина (Технологии. Дизайн. Искусство),
Ивановский государственный политехнический университет)

(Russian State University named after A.N. Kosygin (Technologies. Design. Art),
Ivanovo State Polytechnical University)

E-mail: victor.scherbackow2012@yandex.ru

Изложены результаты исследования изгиба упругопластической нити, для которой наблюдается резко выраженная нелинейность функции деформация – напряжение. Разработанный метод основан на аналитическом представлении диаграммы растяжения и дальнейшем решении задачи – определить аналитическую зависимость между изгибающим моментом и кривизной с последующим нахождением остаточной кривизны и остаточных напряжений после разгрузки.

Results of research of a bend of an elastic - plastic string for which sharply expressed nonlinearity of function stress – strain is observed are stated. The developed method is based on analytical representation of the diagram of a stretching and the further decision of a problem – to determine analytical dependence between bending moment and curvature with the subsequent finding of residual curvature and residual stress after unloading.

Ключевые слова: упругопластическая нить, изгибающий момент, закон Гука, жесткость, растяжение.

Keywords: an elastic-plastic string, a bending moment, Hooke's law, rigidity, tension.

Текстильные материалы обладают многими характерными механическими свой-

ствами, которые присутствуют в других материалах (металлах и др.). Если напряжение

превышает предел упругости, то после снятия нагрузки вызванные ею деформации не исчезают, а частично сохраняются. Эти деформации называются пластическими. Хорошо известно, что нить после роспуска трикотажа принимает волнообразную форму. Так же обстоит дело с нитью, извлеченной из ткани любого переплетения. Объяснение извитости нитей очевидно: упругопластическая нить изгибается на игле вязальной машины или основа огибает уток (и наоборот) на ткацком станке. Внешне все наглядно и просто, но расчет остаточной кривизны нити после полной разгрузки встречает определенные трудности.

Доктором физ.-мат. наук О.Ф. Беляевым разработан программный метод расчета зависимости момента, изгибающего упругопластическую нить, от радиуса кривизны изгиба [1]. На разрывной машине получают зависимость "нагрузка ~ удлинение" образца, которая переводится в зависимость нормальное напряжение – относительное удлинение, программно оцифровывается и интерполируется. Полученная непрерывная зависимость "нормальное напряжение – относительное удлинение" используется для расчета зависимости изгибающего момента от радиуса изгиба. При программировании использован математический пакет программ Matlab.

Проведем исследование изгиба упругопластической нити, для которой наблюдается резко выраженная нелинейность функции $\sigma=f(\epsilon)$. Зная функцию $f(\epsilon)$, решение можно найти аналитически, либо численно. В отличие от [1] излагаемый ниже метод исследования основан на аналитическом представлении $f(\epsilon)$ и дальнейшем решении задачи – определить аналитическую зависимость между изгибающим моментом и кривизной с последующим нахождением остаточной кривизны и остаточных напряжений после разгрузки.

Примем сечение нити в форме круга диаметра $d=2r$. Материал нити одинаково сопротивляется деформированию при растяжении и сжатии. Тогда ось симметрии x , перпендикулярная к y , является нейтраль-

ной осью (рис. 1 – к расчету внутреннего изгибающего момента).

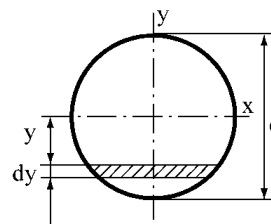


Рис. 1

Известно, что деформация ϵ может быть определена соотношением [2]

$$\epsilon = \frac{y}{\rho}, \quad (1)$$

где $1/\rho$ – кривизна осевой линии нити, y – расстояние от точки поперечного сечения, в которой определяется деформация. Кривизну $1/\rho$ будем обозначать k .

Внутренний изгибающий момент сил, действующих на заштрихованную полосу ширины b и высоты dy (рис. 1), связан с нормальным напряжением в сечении нити σ соотношением:

$$dM = \sigma b y dy.$$

При вычислении интеграла удобно принять за переменную интегрирования деформацию $\epsilon = y/\rho$. Для кругового сечения с учетом замены переменной, обозначив деформацию крайнего волокна ϵ_0 , имеем:

$$M = 2 \int_0^r f(y/\rho) b \left(\frac{d}{2}\right) y dy = 2 \frac{d^2}{4\epsilon_0^2} \int_0^{\epsilon_0} f(\epsilon) b \left(\frac{\epsilon}{\epsilon_0}\right) \epsilon d\epsilon.$$

Вследствие симметрии относительно оси x интегрирование от $-r$ до $+r$ заменено интегрированием от 0 до r , и результат удвоен.

Если диаграмма деформирования не имеет различных участков, то ее можно аппроксимировать степенной функцией. В области сравнительно малых напряжений σ и деформаций ϵ принимается линейный за-

кон упругости $\sigma = E\varepsilon$ (E – модуль упругости). На этом участке кривой в форме степенной функции нить можно считать упругой лишь с известным приближением, сознательно пренебрегая той погрешностью, которая связана со сделанным предположением. Существенно, чтобы эта погрешность не выходила за определенные пределы, устанавливаемые требованиями практики. В связи с этим условием параметры уравнения кривой $\sigma = f(\varepsilon)$ подбираются таким образом, что это уравнение справедливо в обеих областях – упругой и упругопластической. В противном случае приходится применять другие, усложненные модели.

Положив $\sigma = A\varepsilon^m$, для сплошного круглого сечения имеем [3]:

$$M = 2 \frac{d^2}{4\varepsilon_0^2} \int_0^{\varepsilon_0} 2A\varepsilon^m \sqrt{\left(\frac{d}{2}\right)^2 - \left(\frac{\varepsilon}{\rho}\right)^2} \varepsilon d\varepsilon$$

или

$$M = 2 \int_0^{\varepsilon_0} \frac{2A}{\varepsilon_0^2} \left(\frac{d}{2}\right)^3 \varepsilon^{m+1} \sqrt{1 - \left(\frac{\varepsilon}{\varepsilon_0}\right)^2} d\varepsilon. \quad (2)$$

Интеграл $J = \int_0^{\varepsilon_0} \varepsilon^n \sqrt{1 - \left(\frac{\varepsilon}{\varepsilon_0}\right)^2} d\varepsilon$ (здесь обозначено $n = m + 1$) при помощи замены ε новой переменной $\xi = \frac{\varepsilon}{\varepsilon_0}$ может быть приведен к виду:

$$\frac{J}{\varepsilon_0^{n+1}} = \int_0^1 \sqrt{1 - \xi^2} \xi^n d\xi.$$

Если теперь ввести вместо ξ новую переменную интегрирования u по формуле

$$\xi^2 = u, \quad d\xi = \frac{1}{2} u^{-\frac{1}{2}} du,$$

то последнее соотношение дает:

$$J = \frac{1}{2} \int_0^1 u^{\frac{(n-1)}{2}} (1-u)^{\frac{1}{2}} du.$$

Полученное выражение имеет вид эйлерова интеграла первого рода [4]:

$$B(p, q) = \int_0^1 x^{p-1} (1-x)^{q-1} dx.$$

Отсюда:

$$J = \frac{1}{2} B\left(\frac{n+1}{2}, \frac{3}{2}\right). \quad (3)$$

Если учесть, что функция $B(p, q)$ выражается через гамма-функцию формулой

$$B(p, q) = \frac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)},$$

то можно переписать (3) в виде:

$$J = \frac{1}{2} \frac{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n+1}{2} + \frac{3}{2}\right)}.$$

Принимая во внимание рекуррентную формулу [4]:

$$\Gamma(z+1) = z\Gamma(z),$$

формулу удвоения:

$$\Gamma(2z) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} 2^{2z-1} \Gamma(z)\Gamma\left(z + \frac{1}{2}\right),$$

будем иметь:

$$\Gamma\left(\frac{n+1}{2} + \frac{3}{2}\right) = \frac{n+2}{2} \sqrt{\pi} 2^{-n} \frac{\Gamma(n+1)}{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}.$$

Так как $\Gamma\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$, окончательно полу-

чим:

$$J = \frac{2^{n-1} \left[\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)\right]^2}{n+2 \Gamma(n+1)}.$$

Таким образом, изгибающий момент равен:

$$M=4\left(\frac{d}{2}\right)^3 A \varepsilon_0^m \frac{2^m}{3+m} \frac{[\Gamma(1+\frac{m}{2})]^2}{\Gamma(m+2)}. \quad (4)$$

Полученное выражение в частном случае $m=1$ должно совпадать с формулой линейной упругости. Учтем, кроме того, что для линейного упругого материала $A=E$. Проведем вычисления:

$$M=4\left(\frac{d}{2}\right)^3 E \frac{d/2}{\rho} \frac{2}{4} \frac{[\Gamma(\frac{3}{2})]^2}{\Gamma(3)} = E \frac{\pi d^4}{64} \frac{1}{\rho} = \frac{EI_x}{\rho},$$

где $I_x = \frac{\pi d^4}{64}$ – осевой момент инерции.

Этот результат совпадает с хорошо известной теорией изгиба.

Если обозначить в (4):

$$4A \frac{2^m}{m+3} \frac{[\Gamma(1+\frac{m}{2})]^2}{\Gamma(m+2)} \equiv \alpha(m),$$

то $M=(d/2)^3 \alpha(m) \varepsilon_0^m$. Принимая во внимание $\varepsilon_0 = \frac{d/2}{\rho}$, перепишем предыдущее соотношение в виде:

$$M=(d/2)^{3+m} \alpha(m) (1/\rho)^m.$$

Приняв прежнее обозначение кривизны $1/\rho=\kappa$, окончательно напишем формулу связи изгибающего момента с кривизной:

$$M=\alpha(m) (d/2)^{3+m} (\kappa)^m. \quad (5)$$

Рассмотрим в качестве примера изгиб титановой микропроволоки диаметра 67 мкм. График $\sigma=f(\varepsilon)$ заимствован из цитируемой выше работы [1]. Опытные данные ε в долях и σ в сН/мм² представлены двумя матрицами X, Y:

$$X = [0,0 \quad 0,006 \quad 0,01 \quad 0,02 \quad 0,03 \quad 0,04 \quad 0,06]^T,$$

$$Y = 10^4 \times [3,2 \quad 3,5 \quad 4,0 \quad 4,3 \quad 4,4 \quad 4,5]^T.$$

Применяя метод наименьших квадратов, находим $A=7,101 \cdot 10^4$, $m=0,152$. График с экспериментальными и расчетными

величинами представлен на рис. 2 (график напряжение деформация).

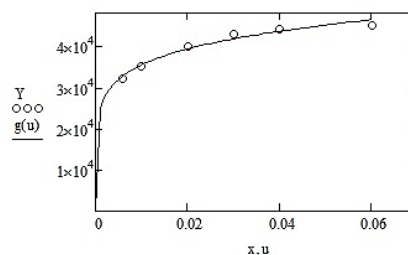


Рис. 2

По формуле (5) вычислен изгибающий момент. График зависимости изгибающего момента от кривизны изображен на рис. 3.

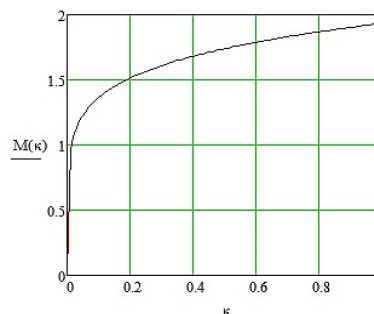


Рис. 3

Предположим, что после достижения моментом некоторого значения M^* , которому соответствует кривизна κ^* , началась разгрузка [2]. Напряжение σ уменьшается до нуля. Диаграмма растяжения, представленная на рис. 2, отражает не только пластическое поведение, но и упругое. Если допустить, что материал и в пластической области сохраняет упругие свойства, то нужно допустить, что деформация ε^* состоит из двух частей: пластической и упругой. В соответствии с законом Гука, если предположить, что он сохраняет силу и в пластической области, величина упругой составляющей есть σ^*/E . При разгрузке пластическая деформация сохраняется неизменной, тогда как упругая исчезает полностью. Следовательно, зависимость напряжение – деформация при разгрузке будет изображаться прямой, наклон которой определяется модулем упругости E . Более тщательные эксперименты показывают,

что закон разгрузки не описывается совершенно точно уравнением линейной упругости. Линия разгрузки, строго говоря, не прямая. В существующих теориях пластичности этими незначительными отклонениями от закона Гука при разгрузке пренебрегают. Тогда разгрузка будет происходить от напряжения $\sigma^* = f(\kappa^* y)$ по закону упругости. Когда изгибающий момент равен $M < M^*$, кривизна равна κ , напряжения находятся по закону упругой разгрузки:

$$\sigma^* - \sigma = E(\kappa^* - \kappa)y. \quad (6)$$

Умножим обе части на $y dF$ и проинтегрируем по площади. Так как

$$\int_F \sigma^* y dF = M^*, \quad \int_F \sigma y dF = M,$$

то

$$M^* - M = EI(\kappa^* - \kappa). \quad (7)$$

Когда происходит полная разгрузка, момент $M=0$, кривизна не исчезает, остаточная кривизна $\kappa_{\text{ост}}$ находится по формуле (7):

$$\kappa_{\text{ост}} = \kappa^* - \frac{M^*}{EI_x}. \quad (8)$$

Напряжения в сечении после разгрузки также не исчезают, из формулы (6) при $\kappa = \kappa_{\text{ост}}$ имеем:

$$\sigma_{\text{ост}} = \sigma^* - \frac{M^* y}{I_x}. \quad (9)$$

Полученные соотношения (8) и (9) становятся необходимыми в расчетах взаимодействия нити с петлеобразующими органами вязальных машин [5], [6], где нить изгибается на иглах, платинах и др. Другой областью приложения изложенной в данной статье теории является растяжение и формоустойчивость трикотажа, особенно когда он представляет собой армирующую составляющую композиционного материала.

ВЫВОДЫ

Определена аналитическая зависимость между изгибающим моментом и кривизной

упругопластической нити с последующим нахождением остаточной кривизны и остаточных напряжений после разгрузки. Получена формула остаточных напряжений после полной разгрузки.

ЛИТЕРАТУРА

1. Заваруев В.А., Беляев О.Ф., Федоров А.А. Расчет изгибающего момента для упругопластической нити при огибании ею трикотажной иглы // Изв. вузов. Технология текстильной промышленности. – 2018, № 6. С. 114...117.
2. Работнов Ю.Н. Механика деформируемого твердого тела. – М.: Наука, 1979.
3. Щербаков В.П. Прикладная механика нити. – М.: МГТУ имени А.Н. Косыгина, 2001.
4. Янке Е., Эмде Ф., Леш Ф. Специальные функции. – М.: Наука, 1968.
5. Кagan В.М., Щербаков В.П. Уточнения и дополнения к решению задачи о равновесии упругой нити на цилиндре. Сообщение 1 // Изв. вузов. Технология текстильной промышленности. – 2003, №2. С. 86...91.
6. Кagan В.М., Щербаков В.П. Уточнения и дополнения к решению задачи о равновесии упругой нити на цилиндре. Сообщение 2 // Изв. вузов. Технология текстильной промышленности. – 2003, №4. С. 71...77.

REFERENCES

1. Zavaruev V.A., Belyaev O.F., Fedorov A.A. Raschet izgibayushchego momenta dlya uprugoplasticheskoy niti pri ogibanii eyu trikotazhnoy igly // Izv. vuzov. Tekhnologiya tekstil'noy promyshlennosti. – 2018, № 6. S. 114...117.
2. Rabotnov Yu.N. Mekhanika deformiruemogo tverdogo tela. – M.: Nauka, 1979.
3. Shcherbakov V.P. Prikladnaya mekhanika niti. – M.: MG TU imeni A.N. Kosygina, 2001.
4. Yanke E., Emde F., Lesh F. Spetsial'nye funktsii. – M.: Nauka, 1968.
5. Kagan V.M., Shcherbakov V.P. Utochneniya i dopolneniya k resheniyu zadachi o ravnovesii uprugoy niti na tsilindre. Soobshchenie 1 // Izv. vuzov. Tekhnologiya tekstil'noy promyshlennosti. – 2003, №2. S.86...91.
6. Kagan V.M., Shcherbakov V.P. Utochneniya i dopolneniya k resheniyu zadachi o ravnovesii uprugoy niti na tsilindre. Soobshchenie 2 // Izv. vuzov. Tekhnologiya tekstil'noy promyshlennosti. – 2003, №4. S.71...77.

Рекомендована кафедрой текстильных технологий РГУ имени А.Н. Косыгина. Поступила 04.02.20.