

ДИНАМИЧЕСКАЯ УСТОЙЧИВОСТЬ НИТИ ПЕРЕМЕННОЙ ДЛИНЫ

А.И. МУНИЦЫН

(Ивановский государственный энергетический университет)

Область неустойчивости первого или главного параметрического резонанса нити переменной длины определена в [1].

Рассмотрим участок нити между натяжным устройством в точке $x=0$ и точкой, координата которой изменяется в про-

дольном направлении по закону $x = a(t)$. Обозначим через w поперечные перемещения точек нити и ограничимся рассмотрением плоских колебаний нерастяжимой нити. С учетом наиболее существенных нелинейных членов уравнения имеют вид:

$$\left[1 - V^2 + (V^2 - 2)\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2\right] \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - 2V \left[1 - \frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2\right] \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial t} - \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} - \varepsilon \frac{\partial w}{\partial t} - \varepsilon V \left[1 - \frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2\right] \frac{\partial w}{\partial x} = 0. \quad (1)$$

Здесь все линейные размеры отнесены к среднему значению длины a_0 нити; ε – коэффициент внешнего трения. Введены

безразмерные время t^* , частота ω^* и скорость V^* движения нити:

$$t = t^* \left(\frac{\rho F a_0^2}{T}\right)^{1/2}, \quad \omega = \omega^* \left(\frac{\rho F a_0^2}{T}\right)^{-1/2}, \quad V = V^* \left(\frac{\rho F}{T}\right)^{-1/2}, \quad \varepsilon = \varepsilon^* \left(\frac{\rho F a_0^2}{T}\right)^{1/2}. \quad (2)$$

где T – натяжение нити; ρF – удельная масса. Далее звездочки опускаем.

Полученное дифференциальное урав-

нение в частных производных должно быть дополнено граничными условиями, которые для рассматриваемой схемы дви-

жения нити имеют вид

$$w = 0, \text{ при } x = 0 \text{ и } x = a(t). \quad (3)$$

Задача о колебаниях нити переменной длины сводится к нелинейному дифференциальному уравнению (1) с переменными границами области определения решений. Заменяя переменные $y = x/a(t)$, получим постоянные границы $y = 0$ и $y = 1$. При

$$\left(\frac{1}{a^2} - 2 \frac{1}{a^4} \dot{w}^2 - \frac{\dot{a}^2}{a^2} y^2 \right) w'' + \left(\frac{\ddot{a}}{a} - 2 \frac{\dot{a}^2}{a^2} + \varepsilon y \frac{\dot{a}}{a} \right) y w' + 2 \frac{\dot{a}}{a} y w' - \varepsilon \dot{w} - \ddot{w} = 0 \quad (5)$$

и граничные условия

$$w = 0, \text{ при } y = 0 \text{ и } y = 1. \quad (6)$$

Здесь точками обозначены производные по времени, штрихами – производные по координате y . Скоростью перемотки нити пренебрегаем.

Аналогичные краевые задачи формулируются для колебаний нити в веере раскладки [2] и в баллоне вращения [3], а также изгибных колебаний балки с неиде-

этом производные по координатам и времени заменяются по формулам

$$\frac{\partial w}{\partial x} = \frac{1}{a} \frac{\partial w}{\partial y}; \quad \frac{\partial w}{\partial t} = \frac{\partial w}{\partial t} - y \frac{\dot{a}}{a} \frac{\partial w}{\partial y}. \quad (4)$$

После подстановки (4) в (1) и (3) получим дифференциальное уравнение

альными опорами [4]. Решение краевой задачи (5) и (6) будем искать в виде движения по первой форме колебаний:

$$w(y,t) = \varphi(t) \sin(\pi y). \quad (7)$$

В результате ортогонализации к базисной функции результата подстановки (7) в (5) получим обыкновенное дифференциальное уравнение относительно функции $\varphi(t)$:

$$\ddot{\varphi} + \left(\varepsilon + \frac{\dot{a}}{a} \right) \dot{\varphi} + \left(\pi^2 - 1,3949 \frac{\dot{a}^2}{a^2} + \frac{\ddot{a}}{2a} - \frac{\dot{a}^2}{a^2} + \varepsilon \frac{\dot{a}}{2a} \right) \varphi - \frac{\pi^4}{2a^4} \varphi^3 = 0. \quad (8)$$

Уравнение (8) представляет собой уравнение параметрических колебаний нелинейной системы с одной степенью свободы, в которой жесткость системы, ее диссипация и коэффициент нелинейности являются периодическими функциями от времени. Для решения полученного уравнения использовали метод продолжения решения по параметру [5].

Представим искомые T -периодические решения в виде отрезка ряда Фурье:

$$\varphi(t) = \sum_{k=1}^N (B_k \sin k\theta t + C_k \cos k\theta t) \quad (9)$$

и из условия ортогональности к базисным функциям по времени $\sin k\theta t$ и $\cos k\theta t$ получим систему нелинейных алгебраических уравнений относительно частоты ω и

коэффициентов B_k и C_k . Число уравнений (так же как и число неизвестных) равно $2N$, где N – число членов ряда, удерживаемых в разложении (9). Даже для одного члена ряда полученная система становится слишком громоздкой, поэтому ее не приводим. Разработанное программное обеспечение позволяет хранить в памяти ЭВМ структуру уравнений и вычислять входящие в нее коэффициенты, не прибегая к аналитическим выкладкам.

Метод продолжения решения по параметру позволяет также исследовать устойчивость полученных решений на основе второго метода Ляпунова [5]. Пусть приближенное периодическое решение $\varphi(t)$ дифференциального уравнения (8) найдено. Рассмотрим некоторое возмущенное решение:

$$\hat{\varphi}(t) = \varphi(t) + \Delta\varphi(t). \quad (10)$$

После подстановки в (8) и линеаризации получим уравнения возмущенного движения первого приближения. Согласно теореме Флюке для каждого характеристического показателя σ существует нормальное решение уравнений возмущенного движения, которое приближенно можно представить в виде отрезка ряда Фурье с множителем $e^{\sigma t}$

$$\Delta\varphi(t) = \sum_{k=1}^N e^{\sigma t} (D_k \sin k\theta t + F_k \cos k\theta t). \quad (11)$$

Применяя процедуру Галеркина и приравняв нулю определитель полученной системы, получаем проблему собственных значений, для решения которой использовался QR-алгоритм [6]. Согласно теоремам Ляпунова об устойчивости по первому приближению знак действительной части характеристических показателей σ_i позволяет сделать вывод об устойчивости полученного решения. Невозмущенное движение является устойчивым, если все σ_i имеют положительную действительную часть, и неустойчивым, если хотя бы один из них имеет отрицательную действительную часть.

Вычисления проводили с учетом трех членов ряда в разложении (9) для безразмерной функции длины нити $a(t)=1+0,1\sin(2\theta t)$. Удвоенная частота изменения длины нити выбрана для того, чтобы не учитывать субгармоники в разложениях (9) и (11).

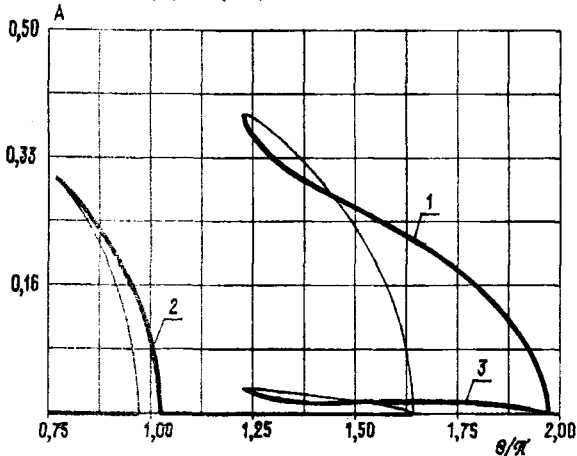


Рис. 1

На рис.1 приведены зависимости от амплитуд трех гармоник решения (9):

$$A_k = (B_k^2 + C_k^2)^{1/2}$$

для значения параметра диссипации $\varepsilon=0,05$. Жирной линией показаны устойчивые решения, тонкой – неустойчивые. цифра у кривой обозначает номер гармоники.

Тривиальное решение уравнения (8) $\varphi(t)=0$, соответствующее продольным перемещениям нити, является устойчивым всюду, кроме областей первого ($1,64 < \theta < 1,96$) и второго ($0,95 < \theta < 1,04$) параметрических резонансов. Параметрические резонансы более высокого порядка для рассматриваемого значения диссипации отсутствуют. Для получения этих областей достаточно было бы рассмотреть линеаризованные уравнения движения нити. Решение нелинейных уравнений позволяет не только найти области неустойчивости тривиального решения, но и определить устойчивое решение соответствующее данной частоте.

Полученные амплитудно-частотные характеристики имеют мягкую нелинейность, что характерно для текстильной нити с натяжным устройством [2,3]. В области первого резонанса амплитуда третьей гармоники значительно ниже первой, что позволяет сделать вывод о том, что высшие гармоники в решении (9) можно не учитывать.

В областях неустойчивости амплитуда колебаний уменьшается с увеличением частоты параметрического возбуждения. Более того, существуют диапазоны частот $1,24 < \theta < 1,64$ – для первого резонанса и $0,77 < \theta < 1,04$ – для второго резонанса, где наряду с тривиальным решением является устойчивым и решение, соответствующее поперечным колебаниям нити с конечной амплитудой. В этом случае любое неучтенное в расчетной схеме возмущение может привести к "перескоку" с одного решения на другое и к нежелательным последствиям, связанным с колебаниями нити с большой амплитудой. С уменьшением

параметра диссипации диапазон этих частот увеличивается и сдвигается влево.

ВЫВОДЫ

Для нити переменной длины получены решения, описывающие движения нити в области параметрических резонансов. Показано, что учет нелинейности системы приводит к значительному увеличению диапазона частот недопустимого режима работы текстильной машины.

ЛИТЕРАТУРА

1. Мизушов И. И. *Механика текстильных нитей и тканей*. – М.: Легкая индустрия, 1980.
2. Муницын А. И. // *Изв. вузов. Технология текстильной промышленности*. – 1997, № 4. С. 80...84.
3. Муницын А.И. // *Изв. вузов. Технология текстильной промышленности*. – 1999, №4. С. 97...102.
4. Муницын А. И. // *Проблемы машиностроения и надежности машин*. – 1998, №2. С.36...39.
5. Гуляев В.И., Баженов В.А., Попов С.Л. *Прикладные задачи теории нелинейных колебаний механических систем*. – М.: Высшая школа, 1989.
6. Икрамов Х.Д. *Несимметричная проблема собственных значений*. – М.: Наука, 1991.

Рекомендована кафедрой теоретической и прикладной механики. Поступила 05.10.01.