

КОРРЕКЦИЯ РАСЧЕТНОЙ СХЕМЫ ПОСТРОЕНИЯ ДИНАМИКИ НИТИ ПРИ СОВМЕСТНОМ УЧЕТЕ ПРОДОЛЬНЫХ И ПОПЕРЕЧНЫХ КОЛЕБАНИЙ

Р. Р. СААКЯН

(Санкт-Петербургский государственный университет технологии и дизайна,
Амурский государственный университет)

Рассмотрим коррекцию расчетных схем определения функций А, В, С, и D при учете взаимодействия участков движения нити на многоучастковой испытательной установке [1]. Как показано ранее в [2], взаимодействие участков приводит к переменности параметризованной координаты. Также показано, что расчет параметризованной координаты математической модели динамики нити выполняется по соотношению (далее все формулы будем рассматривать для опоры 1 [1]):

$$x_1(t_{i+1}) = x_1(t_i) + \dot{x}_1(t_i)\Delta t. \quad (1)$$

Причем для функции \dot{x}_1 получены от-

$$\dot{x}_1 = \dot{x}_1(A'_1, B'_1, A'_2, B'_2, C'_1, D'_1, C'_2, D'_2, x_1). \quad (2)$$

Как и в предыдущем случае [2], будем исходить из того, что условие, определяющее точку нити (и ее координату), лежащую на опоре 1 (точка 1), есть равенство натяжений или относительных деформаций нити в этой точке для первого и второго участков.

Вначале рассмотрим обобщенное, вне зависимости от участков, математическое представление относительной деформации нити с учетом взаимодействия каналов движения (продольных и поперечных колебаний).

Возьмем две близлежащие точки нити x и $x + \Delta x$. Будем рассматривать систему

дельные зависимости для поперечных и продольных колебаний [2]:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= \dot{x}_1(A'_1, B'_1, A'_2, B'_2, x_1) \\ \dot{x}_1 &= \dot{x}_1(C'_1, D'_1, C'_2, D'_2, x_1), \end{aligned}$$

которые использовали в дальнейших расчетах.

При исследовании динамики нити с учетом взаимодействия каналов движения [3] (продольных и поперечных колебаний) требуется расчет функции \dot{x}_1 при совместном учете продольных и поперечных колебаний, то есть

координат (\tilde{U}, \tilde{V}) , определяемых по соотношениям

$$\begin{cases} \tilde{U} = x + U, \\ \tilde{V} = V, \end{cases} \quad (3)$$

где U, V – отклонения от исходного положения нити, а \tilde{U}, \tilde{V} – полные координаты.

Вычислим расстояние (длину нити) между точками x и $x + \Delta x$ (рис.1):

$$\rho(x, x + \Delta x) \approx \sqrt{[\tilde{U}(t, x + \Delta x) - \tilde{U}(t, x)]^2 + [\tilde{V}(t, x + \Delta x) - \tilde{V}(t, x)]^2}.$$

Для относительной деформации ϵ нити получим:

$$\epsilon = \frac{\rho(x, x + \Delta x) - \Delta x}{\Delta x} = \frac{\rho(x, x + \Delta x)}{\Delta x} - 1 \approx \sqrt{\left[\frac{\tilde{U}(t, x + \Delta x) - \tilde{U}(t, x)}{\Delta x} \right]^2 + \left[\frac{\tilde{V}(t, x + \Delta x) - \tilde{V}(t, x)}{\Delta x} \right]^2} - 1.$$

$$\epsilon \approx \sqrt{[\tilde{U}'_x(t, x)]^2 + [\tilde{V}'_x(t, x)]^2} - 1. \quad (5)$$

С учетом системы (3) для относительной деформации ϵ нити запишем

$$\epsilon \approx \sqrt{(1 + U'_x)^2 + (V'_x)^2} - 1. \quad (6)$$

Как было сказано выше, в данном случае в точке 1 должно соблюдаться равенство полученной относительной деформации (натяжения) нити со стороны первого участка справа и со стороны второго участка слева:

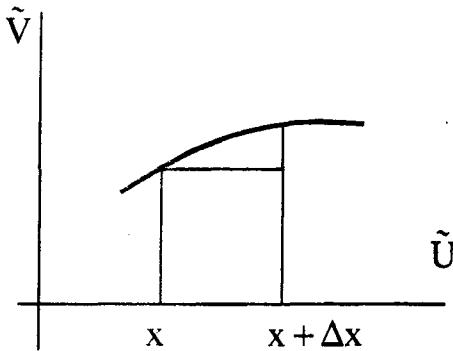


Рис. 1

При условии $\Delta x \rightarrow 0$ из (4) имеем

$$\left(\sqrt{(1 + U'_{1x})^2 + (V'_{1x})^2} - 1 \right)_{x=x_1} = \left(\sqrt{(1 + U'_{2x})^2 + (V'_{2x})^2} - 1 \right)_{x=x_1}. \quad (7)$$

После сокращений (7) приобретает по отношению к производным функций A, B,

С и D по полным аргументам вид

$$\begin{aligned} & \left[1 + \left(A'_1 \left(t + \sqrt{\frac{\rho_0}{b}} x_1 \right) - B'_1 \left(t - \sqrt{\frac{\rho_0}{b}} x_1 \right) \right) \sqrt{\frac{\rho_0}{b}} \right]^2 + \left[C'_1 \left(t + \sqrt{\frac{\rho_0}{T_0}} x_1 \right) - D'_1 \left(t - \sqrt{\frac{\rho_0}{T_0}} x_1 \right) \right]^2 \frac{\rho_0}{T_0} = \\ & = \left[1 + \left(A'_2 \left(t + \sqrt{\frac{\rho_0}{b}} x_1 \right) - B'_2 \left(t - \sqrt{\frac{\rho_0}{b}} x_1 \right) \right) \sqrt{\frac{\rho_0}{b}} \right]^2 + \left[C'_2 \left(t + \sqrt{\frac{\rho_0}{T_0}} x_1 \right) - D'_2 \left(t - \sqrt{\frac{\rho_0}{T_0}} x_1 \right) \right]^2 \frac{\rho_0}{T_0} \end{aligned} \quad (8)$$

Далее воспользуемся приведенными ниже граничными условиями из [1] для первого и второго участков; выполним для одного из уравнений в каждой группе дифференцирование по времени t , имея в виду, что в получающемся результате будет присутствовать производная \dot{x}_1 .

Затем заменим четыре слагаемых в (8)

по указанному получающемуся результату. Тогда будем иметь искомую зависимость (2) с отсутствующими замененными производными.

Рассмотрим граничные условия:

первый участок – продольные колебания

$$\begin{cases} A_1(t) + B_1(t) = 0, \\ A_1\left(t + \sqrt{\frac{Q_0}{b}}x_1\right) + B_1\left(t - \sqrt{\frac{Q_0}{b}}x_1\right) = \ell_1 - x_1(t) + \alpha \sin \psi_1 (1 - \cos \omega t); \end{cases} \quad (9)$$

второй участок – продольные колебания

$$\begin{cases} A_2\left(t + \sqrt{\frac{Q_0}{b}}x_1\right) + B_2\left(t - \sqrt{\frac{Q_0}{b}}x_1\right) = \ell_1 - x_1(t), \\ A_2\left(t + \sqrt{\frac{Q_0}{b}}x_2\right) + B_2\left(t - \sqrt{\frac{Q_0}{b}}x_2\right) = \ell_1 + \ell_2 - x_2(t); \end{cases} \quad (10)$$

первый участок – поперечные колебания

$$\begin{cases} C_1(t) + D_1(t) = 0, \\ C_1\left(t + \sqrt{\frac{Q_0}{T_0}}x_1\right) + D_1\left(t - \sqrt{\frac{Q_0}{T_0}}x_1\right) = \alpha \cos \psi_1 (1 - \cos \omega t); \end{cases} \quad (11)$$

второй участок – поперечные колебания

$$\begin{cases} C_2\left(t + \sqrt{\frac{Q_0}{T_0}}x_1\right) + D_2\left(t - \sqrt{\frac{Q_0}{T_0}}x_1\right) = \alpha (1 - \cos \omega t), \\ C_2\left(t + \sqrt{\frac{Q_0}{T_0}}x_2\right) + D_2\left(t - \sqrt{\frac{Q_0}{T_0}}x_2\right) = 0. \end{cases} \quad (12)$$

Возьмем второе соотношение системы (9).

Дифференцирование по времени t дает

$$\begin{aligned} & \left(1 + \sqrt{\frac{Q_0}{b}}\dot{x}_1\right)A_1'\left(t + \sqrt{\frac{Q_0}{b}}x_1\right) + \left(1 - \sqrt{\frac{Q_0}{b}}\dot{x}_1\right)B_1'\left(t - \sqrt{\frac{Q_0}{b}}x_1\right) = \\ & = -\dot{x}_1 + \alpha \omega \sin \psi_1 \sin \omega t. \end{aligned} \quad (13)$$

Из первого соотношения системы (10)

после дифференцирования получим

$$\left(1 - \sqrt{\frac{Q_0}{b}}\dot{x}_1\right)B_2'\left(t - \sqrt{\frac{Q_0}{b}}x_1\right) + \left(1 + \sqrt{\frac{Q_0}{b}}\dot{x}_1\right)A_2'\left(t + \sqrt{\frac{Q_0}{b}}x_1\right) = -\dot{x}_1. \quad (14)$$

Продифференцировав второе соотношение системы (11), будем иметь

$$\left(1 + \sqrt{\frac{\varrho_0}{T_0}} \dot{x}_1\right) C'_1 \left(t + \sqrt{\frac{\varrho_0}{T_0}} x_1\right) + \left(1 - \sqrt{\frac{\varrho_0}{T_0}} \dot{x}_1\right) D'_1 \left(t - \sqrt{\frac{\varrho_0}{T_0}} x_1\right) = \alpha \omega \cos \psi_1 \sin \omega t. \quad (15)$$

После дифференцирования первого соотношения системы (12) записываем

$$\left(1 - \sqrt{\frac{\varrho_0}{T_0}} \dot{x}_1\right) D'_2 \left(t - \sqrt{\frac{\varrho_0}{T_0}} x_1\right) + \left(1 + \sqrt{\frac{\varrho_0}{T_0}} \dot{x}_1\right) C'_2 \left(t + \sqrt{\frac{\varrho_0}{T_0}} x_1\right) = \alpha \omega \sin \omega t. \quad (16)$$

Подставив из (13...16) соответственно A'_1, B'_2, C'_1, D'_2 в уравнение (8), получим

$$\begin{aligned} & \left[1 + \left(-\frac{2}{1 + \sqrt{\frac{\varrho_0}{b}} \dot{x}_1} B'_1 \left(t - \sqrt{\frac{\varrho_0}{b}} x_1 \right) + \frac{-\dot{x}_1 + \alpha \omega \sin \psi_1 \sin \omega t}{1 + \sqrt{\frac{\varrho_0}{b}} \dot{x}_1} \right) \sqrt{\frac{\varrho_0}{b}} \right]^2 + \\ & + \left[-\frac{2}{1 + \sqrt{\frac{\varrho_0}{T_0}} \dot{x}_1} D'_1 \left(t - \sqrt{\frac{\varrho_0}{T_0}} x_1 \right) + \frac{\alpha \omega \cos \psi_1 \sin \omega t}{1 + \sqrt{\frac{\varrho_0}{T_0}} \dot{x}_1} \right]^2 \sqrt{\frac{\varrho_0}{T_0}} = \\ & = 1 + \left[-\frac{2}{1 - \sqrt{\frac{\varrho_0}{b}} \dot{x}_1} A'_2 \left(t + \sqrt{\frac{\varrho_0}{b}} x_1 \right) + \frac{\dot{x}_1}{1 + \sqrt{\frac{\varrho_0}{b}} \dot{x}_1} \right]^2 \sqrt{\frac{\varrho_0}{b}} + \\ & + \left[\frac{2}{1 - \sqrt{\frac{\varrho_0}{T_0}} \dot{x}_1} C'_2 \left(t + \sqrt{\frac{\varrho_0}{T_0}} x_1 \right) - \frac{\alpha \omega \sin \omega t}{1 - \sqrt{\frac{\varrho_0}{T_0}} \dot{x}_1} \right]^2 \sqrt{\frac{\varrho_0}{T_0}}. \quad (17) \end{aligned}$$

После упрощения соотношения (17) имеем

$$\begin{aligned} & \frac{\left[1 + \sqrt{\frac{\varrho_0}{b}} \left(\alpha \omega \sin \psi_1 \sin \omega t - 2B'_1 \left(t - \sqrt{\frac{\varrho_0}{b}} x_1 \right) \right) \right]^2}{\left(1 + \sqrt{\frac{\varrho_0}{b}} \dot{x}_1 \right)^2} + \frac{\left[\alpha \omega \cos \psi_1 \sin \omega t - 2D'_1 \left(t - \sqrt{\frac{\varrho_0}{T_0}} x_1 \right) \right]^2 \frac{\varrho_0}{T_0}}{\left(1 + \sqrt{\frac{\varrho_0}{T_0}} \dot{x}_1 \right)^2} = \\ & = \frac{\left[1 + \sqrt{\frac{\varrho_0}{b}} \left(2A'_2 \left(t + \sqrt{\frac{\varrho_0}{b}} x_1 \right) \right) \right]^2}{\left(1 - \sqrt{\frac{\varrho_0}{b}} \dot{x}_1 \right)^2} + \frac{\left[2C'_2 \left(t + \sqrt{\frac{\varrho_0}{T_0}} x_1 \right) - \alpha \omega \sin \omega t \right]^2 \frac{\varrho_0}{T_0}}{\left(1 - \sqrt{\frac{\varrho_0}{T_0}} \dot{x}_1 \right)^2}. \quad (18) \end{aligned}$$

Уравнение (18) представляет собой полином 4-й степени относительно \dot{x}_1 . Однако в допустимом интервале изменения \dot{x}_1 (а именно следует считать $|\dot{x}_1| < \min \left\{ \sqrt{\frac{T_0}{\rho_0}} \sqrt{\frac{b}{\rho_0}} \right\}$ – скорость пространства волны) находится только один корень уравнения (18). Поясним это далее.

В численной схеме этот корень можно определить методом Ньютона, методом половинного сечения и т.д.

Для нахождения \dot{x}_1 в линейном приближении проводим разложение в ряд Тейлора знаменателей дробей соотношения (18) относительно \dot{x}_1 :

$$\begin{cases} \frac{1}{\left(1 + \sqrt{\frac{\rho_0}{b}} \dot{x}_1\right)^2} = 1 - 2\sqrt{\frac{\rho_0}{b}} \dot{x}_1 + 3\frac{\rho_0}{b} \dot{x}_1^2 + \dots; \\ \frac{1}{\left(1 + \sqrt{\frac{\rho_0}{T_0}} \dot{x}_1\right)^2} = 1 - 2\sqrt{\frac{\rho_0}{T_0}} \dot{x}_1 + 3\frac{\rho_0}{T_0} \dot{x}_1^2 + \dots \end{cases} \quad (19)$$

$$\begin{cases} \frac{1}{\left(1 - \sqrt{\frac{\rho_0}{b}} \dot{x}_1\right)^2} = 1 + 2\sqrt{\frac{\rho_0}{b}} \dot{x}_1 + 3\frac{\rho_0}{b} \dot{x}_1^2 + \dots; \\ \frac{1}{\left(1 - \sqrt{\frac{\rho_0}{T_0}} \dot{x}_1\right)^2} = 1 + 2\sqrt{\frac{\rho_0}{T_0}} \dot{x}_1 + 3\frac{\rho_0}{T_0} \dot{x}_1^2 + \dots \end{cases} \quad (20)$$

Используя (18...20), получаем искомую зависимость (2) в линейном приближении в виде

$$\dot{x}_1(t) \approx \frac{R_1^2 + R_2^2 - R_3^2 - R_4^2}{2 \left(\sqrt{\frac{\rho_0}{b}} (R_1^2 + R_3^2) + \sqrt{\frac{\rho_0}{T_0}} (R_2^2 + R_4^2) \right)} \quad (21)$$

где

$$R_1 = 1 + \sqrt{\frac{\rho_0}{b}} \left(\alpha \omega \sin \psi_1 \sin \omega t - 2B'_1 \left(t - \sqrt{\frac{\rho_0}{b}} x_1 \right) \right);$$

$$R_2 = \left(\alpha \omega \cos \psi_1 \sin \omega t - 2D'_1 \left(t - \sqrt{\frac{\rho_0}{T_0}} x_1 \right) \right) \sqrt{\frac{\rho_0}{T_0}};$$

$$R_3 = 1 + \sqrt{\frac{\rho_0}{b}} \left(2A'_2 \left(t + \sqrt{\frac{\rho_0}{b}} x_1 \right) \right);$$

$$R_4 = \left(2C'_2 \left(t + \sqrt{\frac{\rho_0}{T_0}} x_1 \right) - \alpha \omega \sin \omega \right) \sqrt{\frac{\rho_0}{T_0}}.$$

Дадим пояснения по вопросу одного корня уравнения (18) в рассматриваемом

диапазоне значений \dot{x}_1 (рис.2).

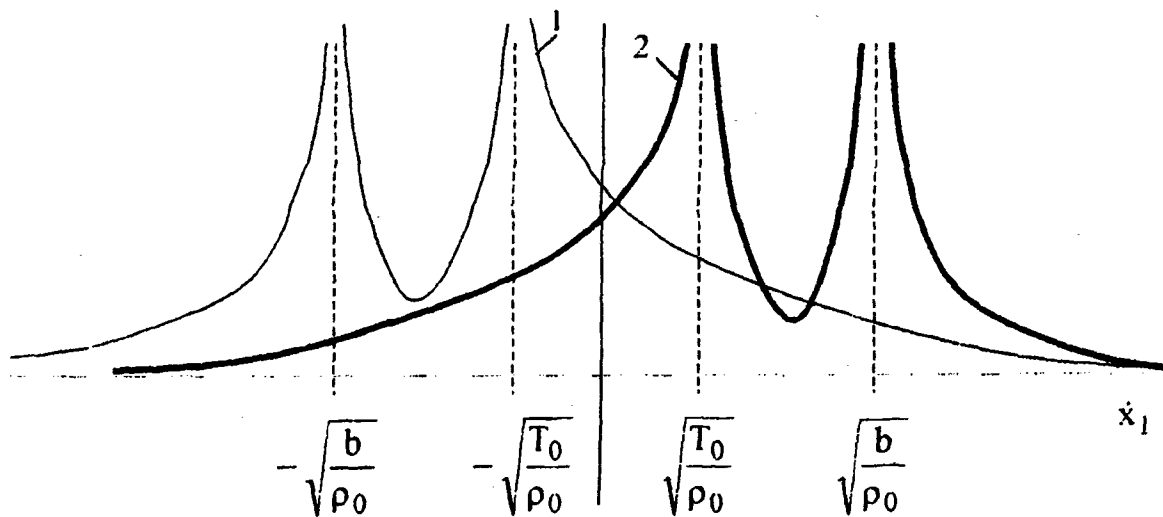


Рис. 2

Обозначим

$$z = \left\langle \min \left\{ \sqrt{\frac{T_0}{\rho_0}}, \sqrt{\frac{b}{\rho_0}} \right\} \right\rangle.$$

Левая часть уравнения (18), как функция переменной \dot{x}_1 (кривая 1), является строго монотонно убывающей от $+\infty$ функцией на интервале $(-z, z)$. Правая часть уравнения (18), как функция переменной \dot{x}_1 (кривая 2), является строго монотонно возрастающей до $+\infty$ функцией на этом же интервале. Отсюда и вытекает существование единственного решения $\dot{x}_1 \in (-z, z)$ этого уравнения.

ВЫВОДЫ

Изложена методика совместного учета продольных и поперечных движений

(скольжений) нити на опоре, создающей возмущения, с помощью которой можно добиться повышения точности прогнозирования динамики нити. Аналогичным образом должен проводиться расчет параметрической координаты касания для других опор.

ЛИТЕРАТУРА

1. Романов В.Е., Жабко А.П., Климов В.А. // Изв. вузов. Технология текстильной промышленности. - 1998, №6. С. 83...84.
2. Маежов Е.Г., Червяков В.В., Жабко Л.Е. // Изв. вузов. Технология текстильной промышленности. - 1999, №4. С. 115...122.
3. Маежов Е.Г. и др. // Изв. вузов. Технология текстильной промышленности. - 1999, №6. С. 110...115.

Рекомендована кафедрой автоматизации производственных процессов. Поступила 12.02.02.