УДК 677.052.9

ОСНОВЫ МЕТОДИКИ ИССЛЕДОВАНИЯ НЕПОДВИЖНЫХ ВЬЮРКОВ

К.Ю. ПАВЛОВ, Ю.В. ПАВЛОВ

(Ивановская государственная текстильная академия)

В [1] установлено, что неподвижный вьюрок действует с наилучшим эффектом (наибольшие крутка и крутящий момент) в том случае, если ось продукта прядения в области входа на поверхность представляет собой кривую, имеющую наибольшее значение естественного кручения χ. Поскольку доказано, что направление движения продукта прядения по поверхности неподвижного вьюрка практически совпадает с геодезическим направлением, первостепенное значение приобретает естественное кручение геодезических линий поверхности и их кривизны.

Таким образом, задача расчета неподвижных вьюрков заключается в отыскании таких геодезических направлений различных областей всевозможных поверхностей, для которых естественное кручение χ продукта принимает максимальные значения. Решить такую задачу можно методами дифференциальной геометрии.

Если поверхность P, определяемая параметрами u и υ, задана уравнением

$$\bar{r}(u,\upsilon) = X(u,\upsilon)\bar{i} + Y(u,\upsilon)\bar{j} + Z(u,\upsilon)\bar{k}, \quad (1)$$

то уравнения геодезических линий в дифференциальной форме имеют вид

$$\begin{aligned} &\frac{d}{ds}(Eu'+F\upsilon') = \frac{1}{2}(E_1u'^2+2F_1u'\upsilon'+G_1\upsilon'^2), \\ &\frac{d}{ds}(Eu'+G\upsilon') = \frac{1}{2}(E_2u'^2+2F_2u'\upsilon'+G_2\upsilon'^2). \end{aligned} \quad (2)$$

Для геодезических линий кривизну поверхности можно определить по формуле

$$k = \frac{1}{H}\frac{Lu'^2+2Mu'\upsilon'+N\upsilon^2}{Eu'^2+2Fu'\upsilon'+G\upsilon^2}. \quad (3)$$

Для выражения естественного кручения геодезических линий имеем

$$\chi = \frac{1}{H^2}\left[(EM-FL)u'^2+(EN-GL)u'\upsilon'+(FN-GM)\upsilon'^2\right]. \quad (4)$$

Производные u' и υ' определяют направление геодезических линий.

Задав параметры u и υ в линейной размерности, запишем

$$u' = \frac{du}{ds} = \cos\beta;\ \upsilon' = \frac{d\upsilon}{ds} = \sin\beta, \quad (5)$$

где β – угол между линией υ – const и геодезической линией. С учетом этого уравнение (3) примет вид

$$k = \frac{1}{H}\frac{L\cos^2\beta + 2M\cos\beta\sin\beta + N\sin^2\beta}{E\cos^2\beta + 2F\cos\beta\sin\beta + G\sin^2\beta}, \quad (6)$$

а уравнение (4):

$$\chi = \frac{1}{H^2}\left[(EM - FL)\cos^2\beta + (EN - GL)\frac{\sin 2\beta}{2} + (FN - GM)\sin^2\beta\right]. \qquad (7)$$

Здесь E, F, G, H^2 – коэффициенты 1-й квадратичной формы поверхности; L, M, N – коэффициенты 2-й квадратичной формы поверхности.

Они запишутся следующим образом:

$$E = X_u^2 + Y_u^2 + Z_u^2, \text{где } (X_u = \frac{\partial x}{\partial u}, ...),$$

$$G = X_\upsilon^2 + Y_\upsilon^2 + Z_\upsilon^2, \text{где } (X_\upsilon = \frac{\partial x}{\partial \upsilon}, ...), \qquad (8)$$

$$F = X_u X_\upsilon + Y_u Y_\upsilon + Z_u Z_\upsilon, \; H^2 = EG - F^2,$$

$$L = \begin{vmatrix} X_{uu} & Y_{uu} & Z_{uu} \\ X_u & Y_u & Z_u \\ X_\upsilon & Y_\upsilon & Z_\upsilon \end{vmatrix} \quad M = \begin{vmatrix} X_{u\upsilon} & Y_{u\upsilon} & Z_{u\upsilon} \\ X_u & Y_u & Z_u \\ X_\upsilon & Y_\upsilon & Z_\upsilon \end{vmatrix} \quad N = \begin{vmatrix} X_{\upsilon\upsilon} & Y_{\upsilon\upsilon} & Z_{\upsilon\upsilon} \\ X_u & Y_u & Z_u \\ X_\upsilon & Y_\upsilon & Z_\upsilon \end{vmatrix}. \qquad (9)$$

$$(X_{uu} = \frac{\partial^2 x}{\partial u^2}, ...; \; X_{u\upsilon} = \frac{\partial^2 x}{\partial u \partial \upsilon}, ...; \; X_{\upsilon\upsilon} = \frac{\partial^2 x}{\partial u^2}, ...).$$

Следовательно, с помощью (7) и (8) можно определить кривизну и естественное кручение для любой геодезической линии на любой поверхности, если u и υ имеют линейную размерность. В расчетах иногда бывает целесообразно в качестве параметров u и υ брать угловые величины.

Пусть u и υ – угловые параметры в радианах.

Тогда

$$du = \frac{d\breve{u}}{\varrho_u} \text{ и } d\upsilon = \frac{d\breve{\upsilon}}{\varrho_\upsilon},$$

где $d\breve{u}$ и $d\breve{\upsilon}$ – дуги, соответствующие углам du и dυ; ρ_u и ρ_υ – радиусы кривизны координатных линий поверхности соответственно по направлениям; (υ – const) и (u – const).

Таким образом,

$$u' = \frac{du}{ds} = \frac{d\breve{u}}{ds}\frac{1}{\varrho_u} \text{ и } \upsilon' = \frac{d\upsilon}{ds} = \frac{d\breve{\upsilon}}{ds}\frac{1}{\varrho_\upsilon}. \qquad (10)$$

Отсюда:

$$u' = \frac{\cos\beta}{\varrho_u}, \quad \upsilon' = \frac{\sin\beta}{\varrho_\upsilon}. \qquad (11)$$

В этом случае (6) примет вид

$$k = \frac{1}{H}\frac{L\frac{\cos^2\beta}{\varrho_u^2} + 2M\frac{\cos\beta}{\varrho_u}\frac{\sin\beta}{\varrho_\upsilon} + N\frac{\sin^2\beta}{\varrho_\upsilon^2}}{E\frac{\cos^2\beta}{\varrho_u^2} + 2F\frac{\cos\beta}{\varrho_u}\frac{\sin\beta}{\varrho_\upsilon} + G\frac{\sin^2\beta}{\varrho_\upsilon^2}} \qquad (12)$$

и

$$\chi = \frac{1}{H^2}\left[\frac{1}{\varrho_u}(EM - FL)\cos^2\beta + \frac{1}{\varrho_u\varrho_\upsilon}(EN - GL)\frac{\sin 2\beta}{2} + \frac{1}{\varrho_\upsilon^2}(FN - GM)\sin^2\beta\right]. \qquad (13)$$

По этим формулам можно рассчитать кривизну и кручение на поверхности неподвижного вьюрка практически любой формы.

В качестве проверки предложенного метода расчета неподвижных вьюрков рассмотрим частный случай.

Пусть поверхность неподвижного вьюрка выполнена в форме цилиндра и определена уравнением

$$X = a\cos u,\ Y = a\sin u,\ Z = \upsilon. \qquad (14)$$

Тогда производные x, y, z суть

$$\begin{aligned} &x_u = -a\sin u, && x_\upsilon = 0, && x_{uu} = -a\cos u, && x_{u\upsilon} = x_{\upsilon\upsilon} = 0, \\ &y_u = a\cos u, && y_\upsilon = 0, && y_{uu} = -a\sin u, && x_{u\upsilon} = y_{u\upsilon} = 0, \\ &z = 0, && z_\upsilon = 1, && z_{uu} = 0, && z_{u\upsilon} = z_{\upsilon\upsilon} = 0. \end{aligned} \qquad (15)$$

Используя (8) и (9), получаем

$$\begin{aligned} &E = a^2,\ F = 0,\ G = 1,\ H = a, \\ &L = -a^2,\ M = 0,\ N = 0,\ \varrho_u = a. \end{aligned} \qquad (16)$$

Выполнив расчеты по формулам (12) и (13),запишем

$$k = \frac{\cos^2\beta}{a} = \frac{a}{a^2 + \alpha^2}, \qquad (17)$$

$$\chi = \frac{\sin\beta\cos\beta}{a} = \frac{a}{a^2 + \alpha^2}. \qquad (18)$$

Таким образом, из (17) и (18) получена винтовая линия (геодезическая линия для цилиндрической поверхности) с постоянным значением кривизны и естественного кручения.

Здесь α – коэффициент подъема винтовой линии, равный

$$\alpha = \frac{h}{2\pi}, \qquad (19)$$

где h – шаг подъема винтовой линии.

Проведенные расчеты подтверждают правильность предлагаемой методики. Аналогично можно рассчитать величину кривизны и кручения для более сложной кривой, с которой совпадает ось продукта прядения на поверхности неподвижного вьюрка, что позволяет проектировать вьюрки, соответствующие особым требованиям.

ВЫВОДЫ

Предложена методика расчета кривизны и естественного кручения кривой оси продукта прядения на поверхности неподвижного вьюрка практически любой формы.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Павлов Ю.В.* Неподвижные вьюрки в прядении. – М.: Легкая индустрия, 1975.

Рекомендована кафедрой прядения. Поступила 14.05.01.