УДК 677.021.17

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ РАССЕИВАНИЯ ПЫЛИ В ТУРБУЛЕНТНОМ ВОЗДУШНОМ ПОТОКЕ

Н.Е. ЕГОРОВА, Ф.Н. ЯСИНСКИЙ

(Ивановская государственная текстильная академия, Ивановский государственный энергетический университет)

При оценке эффективности пылеулавливающих устройств в свете решения проблемы очистки запыленного воздуха на текстильных предприятиях необходимо учитывать турбулентность воздушного потока. Из-за возникающих турбулентных пульсаций частицы пыли выносятся в зону очищенного воздуха, снижая тем самым эффективность сепарации. Вследствие этого возникает потребность в учете рассеивания пыли в воздушном сепараторе за счет возникающих турбулентных пульсаций.

В целях исследования этих процессов рассмотрим схему устройства, представленного на рис. 1.

В турбулентный воздушный поток, движущийся по трубе радиусом R, по трубке радиусом r_0 подается запыленный воздух. Исследуем процесс распространения пыли в этом устройстве.

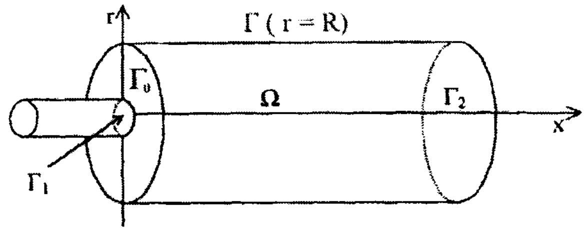

Рис. 1

Для определения плотности пыли воспользуемся уравнением

$$\frac{\partial\rho}{\partial t}+\frac{\partial\rho}{\partial x}U(r)=\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(Dr\frac{\partial\rho}{\partial r}\right), \qquad (1)$$

где ρ – плотность пылевого облака, то есть масса пылинок на $см^3$; U – осевая скорость воздушного потока (средняя скорость пылинки по оси x); D – коэффициент диффузии для пыли.

К уравнению (1) добавим следующие краевые условия:

$$\rho\big|_{\Gamma_0}=0, \qquad \rho\big|_{\Gamma_1}=\rho_0, \qquad \frac{\partial\rho}{\partial r}\Big|_{\Gamma}=0, \qquad \frac{\partial\rho}{\partial r}\Big|_{r=0}=0. \qquad (2)$$

Здесь Γ_0, Γ_1, Γ_2, Г – границы области Ω.

Дополнительно введем условие неразрывности для пылевого потока

$$\int_0^{r_0}\rho_0\,2\pi r\,dr=\int_0^R\rho(r)2\pi r\,dr \qquad (3)$$

и мягкое граничное условие

$$\frac{\partial^2\rho}{\partial x^2}\Big|_{\Gamma_2}=0. \qquad (4)$$

Из формулы (1) найдем плотность ρ(r, x) распределения пыли в устройстве.

Для того, чтобы решить предложенное уравнение, необходимо знать коэффициент диффузии. Определим его следующим образом.

На частицу пыли действуют турбулентные пульсации воздуха

$$V = V_{ср} \frac{\sum_{m=1}^{N} a_m \sin(\omega_m t + \alpha_m)}{\sum_{m=1}^{N} a_m}, \quad (5)$$

где V – скорость пульсаций; $V_{ср}$ – среднеквадратичная скорость пульсаций; a_m и ω_m – амплитуды и частоты турбулентных пульсаций; α_m – случайные величины из интервала $(0,2\pi)$.

Амплитуды и частоты вычислим по формулам

$$a_m = \frac{1}{1+\gamma m^n}, \quad \omega_m = \frac{2\pi}{T} m, \quad (6)$$

где γ, n, T – некоторые константы.

Воздействие пульсаций воздуха на частицу пыли опишем уравнением

$$\frac{du}{dt} = g\frac{1}{w^2}|V|V\cos\alpha\cos\beta, \quad (7)$$

где w – скорость витания частицы; u – мгновенная скорость хаотического движения частицы; α и β – случайные величины, равнораспределенные в интервалах $0 < \alpha < 2\pi$, $-\pi < \beta < \pi$, и решим его с помощью следующей конечно-разностной схемы

$$u^{k+1} = u^k + \tau g\frac{1}{w^2}\left|V^k\right|V^k \cos\alpha^k \cos\beta^k, \quad (8)$$

$$V^k = V_{ср}\sum_{m=1}^{N} \tilde{a}_m \sin(\omega_m t^k + \alpha_m), \quad (9)$$

$$r^{k+1} = r^k + \tau u^{k+1}, \quad (10)$$

$$t^{k+1} = t^k + \tau, \quad (11)$$

где r – расстояние от частицы до оси трубы; t – время; τ – шаг по времени.

Вычисления проводим до момента t_{max}, полученное r – смещение частицы от начального положения. Осуществим θ экспериментов и соответственно получим θ результатов, которые осредним по формуле

$$\overline{r^2} = \frac{1}{\theta}\sum_{i=1}^{\theta} r_i^2. \quad (12)$$

По среднему квадрату радиусов найдем коэффициент диффузии:

$$D = \frac{\overline{r^2}}{t_{max}}. \quad (13)$$

В свою очередь, для определения коэффициента диффузии требуется знать $V_{ср}$, которое вычислим по формуле

$$V_{ср} = \sqrt{\frac{2K}{\rho_{возд}}}, \quad (14)$$

где K – кинетическая энергия турбулентных пульсаций, которую получаем при решении следующей системы уравнений:

$$\frac{\partial K}{\partial t} = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{\nu_e r}{\sigma_K}\frac{\partial K}{\partial r}\right) + \nu_e\left(\frac{\partial U}{\partial r}\right)^2 - \varepsilon, \quad (15)$$

$$\frac{\partial \varepsilon}{\partial t} = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{\nu_e r}{\sigma_\varepsilon}\frac{\partial \varepsilon}{\partial r}\right) + \frac{\varepsilon}{K}\left(c_1\nu_e\left(\frac{\partial U}{\partial r}\right)^2 - c_2\varepsilon\right), \quad (16)$$

$$\frac{\partial U}{\partial t} = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(\nu_e r\frac{\partial U}{\partial r}\right) - \frac{1}{\rho_{возд}}\frac{\partial P}{\partial x}, \quad (17)$$

где ε – скорость диссипации турбулентных вихрей; U – скорость воздушного потока; ν_e – эффективная вязкость, равная сумме молекулярной и турбулентной вязкостей:

$$\nu_e = \nu_{mol} + \nu_{turb}, \qquad (18)$$

где $\nu_{turb} = c_\mu \dfrac{K^2}{\varepsilon}$.

Величина продольного градиента давления, отнесенная к плотности воздуха:

$$\frac{1}{\rho_{возд}} \frac{\partial P}{\partial x} = \text{const}.$$

Приведенная здесь полуэмпирическая К – ε модель турбулентности содержит постоянные $c_\mu = 0{,}09$; $c_1 = 1{,}41$; $c_2 = 1{,}92$; $\sigma_K = 1$; $\sigma_\varepsilon = 1{,}3$.

Систему уравнений (15...17) дополним граничными условиями

$$K|_\Gamma = 0,\ \varepsilon|_\Gamma = 0,\ U|_\Gamma = 0,\ \frac{\partial K}{\partial r}\Big|_{r=0} = 0,\ \frac{\partial \varepsilon}{\partial r}\Big|_{r=0} = 0,\ \frac{\partial U}{\partial r}\Big|_{r=0} = 0. \qquad (19)$$

С целью решения этой системы уравнений воспользуемся методом установления со способом прогонки.

Уравнения (1) и (15...17) принадлежат к одному типу:

$$\frac{\partial Q}{\partial t} + U \frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{A_Q r}{\sigma_Q} \frac{\partial Q}{\partial r}\right) + S_Q. \qquad (20)$$

Для выражений (15...17), описывающих движение воздуха, слагаемым $U \dfrac{\partial Q}{\partial x}$ можно пренебречь.

Напишем для этого уравнения разностную схему:

$$\frac{Q_i^{k+1} - Q_i^k}{\tau} + U_i^k \frac{Q_{i+1}^{k+1} - Q_{i-1}^{k+1}}{2h} = \frac{1}{r_i \sigma_Q} \frac{A_{Q_{i+0,5}}^k r_{i+0,5}(Q_{i+1}^{k+1} - Q_i^{k+1}) - A_{Q_{i-0,5}}^k r_{i-0,5}(Q_i^{k+1} - Q_i^{k+1})}{h^2} + S_{Q_i}^k, \qquad (21)$$

где $A_{Q_{i+0,5}} = \dfrac{A_{Q_{i+1}} + A_{Q_i}}{2}$, $\quad A_{Q_{i-0,5}} = \dfrac{A_{Q_{i-1}} + A_{Q_i}}{2}$, $\ r_{i+0,5} = r_i + \dfrac{h}{2}$, $\ r_{i-0,5} = r_i - \dfrac{h}{2}$.

Обозначим

$$b_1 = \frac{(A_{Q_{i+1}}^k + A_{Q_i}^k)(r_i + \frac{h}{2})}{2 r_i \sigma_Q h^2}, \qquad b_2 = \frac{(A_{Q_{i-1}}^k + A_{Q_i}^k)(r_i - \frac{h}{2})}{2 r_i \sigma_Q h^2}.$$

Уравнение (21) перепишем в виде

$$Q_{i-1}^{k+1}\left(-b_2 - \frac{U_i^k}{2h}\right) + Q_i^{k+1}\left(b_1 + b_2 + \frac{1}{\tau}\right) + Q_{i+1}^{k+1}\left(-b_1 + \frac{U_i^k}{2h}\right) = \frac{Q_i^k}{\tau} + S_{Q_i}^k. \qquad (22)$$

В используемом методе прогонки применим прогоночную формулу

$$Q_{i-1}^{k+1} = L_i Q_i^{k+1} + M_i,$$

где

$$L_{i+1} = \frac{b_1 - \dfrac{U_i^k}{2h}}{-L_i\left(b_2 + \dfrac{U_i^k}{2h}\right) + b_1 + b_2 + \dfrac{1}{\tau}}, \quad M_{i+1} = \frac{\dfrac{Q_i^k}{\tau} + S_{Q_i}^k + M_i\left(b_2 + \dfrac{U_i^k}{2h}\right)}{-L_i\left(b_2 + \dfrac{U_i^k}{2h}\right) + b_1 + b_2 + \dfrac{1}{\tau}}. \quad (23)$$

Поскольку к уравнению (20) добавляется граничное условие $\dfrac{\partial Q}{\partial r}\Big|_{r=0} = 0$, то есть $Q_0 = Q_1$, из $Q_0^{k+1} = L_1 Q_1^{k+1} + M_1$ следует, что $L_1 = 1$, $M_1 = 0$.

Уравнения (15...17) решаются предложенным методом до установления аэродинамического поля. В дальнейшем по формуле (14) с помощью кинетической энергии K пульсаций находится средняя скорость $V_{ср}$ турбулентных пульсаций. Далее согласно алгоритму (5...13) вычисляется коэффициент D диффузии. После этого можно перейти к уравнению (1) и определить распределение плотности пылевого облака в турбулентном воздушном потоке.

ВЫВОДЫ

Предложена методика расчета рассеивания пылевого облака при его движении в турбулентном воздушном потоке.

Рекомендована кафедрой прикладной математики и информационных технологий. Поступила 12.06.01.