№ 2 (266) ТЕХНОЛОГИЯ ТЕКСТИЛЬНОЙ ПРОМЫШЛЕННОСТИ 2002

УДК 539.434:677.494

ОПРЕДЕЛЕНИЕ АНАЛИТИЧЕСКОЙ ВЗАИМОСВЯЗИ НОРМИРОВАННЫХ ЯДЕР РЕЛАКСАЦИИ И ПОЛЗУЧЕСТИ ТЕКСТИЛЬНЫХ МАТЕРИАЛОВ

А.Г. МАКАРОВ

(Санкт-Петербургский государственный университет технологии и дизайна)

Широкое использование синтетических нитей в различных отраслях промышленности вызывает необходимость изучения их физико-механических характеристик.

Процесс прогнозирования вязкоупругих характеристик основан на решении интегральных уравнений [1]:

$$\sigma_t = E_o \varepsilon_t + \int_0^t \varepsilon_{t-s} E'_{\varepsilon s} ds \qquad (1)$$

– для процесса релаксации и

$$\varepsilon_t = D_o \sigma_t + \int_0^t \sigma_{t-s} D'_{\sigma s} ds \qquad (2)$$

– для процесса ползучести, где $E'_{\varepsilon s} = \dfrac{\partial E_{\varepsilon s}}{\partial s}$ – релаксационное ядро наследственного типа, отражающее деформационно-временную аналогию; $D'_{\sigma s} = \dfrac{\partial D_{\sigma s}}{\partial s}$ – ядро ползучести такого же типа, отражающее силовременную аналогию; $E_{\varepsilon t}$ – модуль релаксации, зависящий от деформации ε и времени t; E_o – модуль упругости; $D_{\sigma t}$ – податливость, зависящая от напряжения σ и времени t; D_o – начальная упругая податливость. Указанные ядра релаксации и ползучести задаются уравнением релаксации

$$E_{\varepsilon t} = E_o - (E_o - E_\infty)\varphi_{\varepsilon t} \qquad (3)$$

и уравнением ползучести

$$D_{\sigma t} = D_o - (D_o - D_\infty)\varphi_{\sigma t} \qquad (4)$$

соответственно, где E_∞ – модуль вязкоупругости; D_∞ – предельно равновесная податливость, а в качестве нормированных функций $\varphi_{\varepsilon t}$ и $\varphi_{\sigma t}$ (далее $\varphi(t/\tau) = \varphi(t)$, где $\tau = \tau_\varepsilon$ – время релаксации, зависящее от деформации ε для $E_{\varepsilon t}$ или $\tau = \tau_\sigma$ – время запаздывания, зависящее от параметра σ для $D_{\sigma t}$) можно выбирать, например [1], функцию Кольрауша с константой k, зависящей от свойств исследуемого материала:

$$\varphi\left(\frac{t}{\tau}\right) = 1 - e^{-\left(\frac{t}{\tau}\right)^k}. \qquad (5)$$

При рассмотрении деформационных свойств таких объектов, как тканые капроновые ленты (ТК), показано [2], что они обладают линейными вязкоупругими свойствами. Это существенно упрощает преобразования, поскольку в этом случае зависимостью функции $\varphi(t/\tau)$ от значений ε и σ можно пренебречь.

Связь модуля релаксации $E(t)$ с податливостью $D(t)$ в данном простейшем линейном случае дается соотношением [3]:

$$\int_0^t E(\theta)D(t-\theta)d\theta = t\,, \qquad (6)$$

дифференцируя которое, получаем

$$E(t)D(0) + \int_0^t E(\theta)D'(t-\theta)d\theta = 1\ . \qquad (7)$$

Осуществив замену переменной $s = t - \theta$ в (6), будем иметь

$$E(0)D(t) + \int_0^t E'(t-s)D(s)ds = 1\ . \qquad (8)$$

Как видим, для определения податливости $D(t)$ по известному модулю релаксации $E(t)$ приходится решать интегральные уравнения (7) или (8).

Выразим из (6) $D(t)$ через $E(t)$ с помощью преобразования Лапласа:

$$L(E(t))L(D(t)) = \frac{1}{p^2}\,,$$

то есть имеем операторное уравнение

$$L(D(t)) = \frac{1}{p^2 L(E(t))}\,. \qquad (9)$$

Преобразуем модуль релаксации с помощью формул (3) и (5):

$$E(t) = E_o - (E_o - E_\infty)\left(\frac{t}{\tau}\right)^k + \frac{E_o - E_\infty}{2!}\left(\frac{t}{\tau}\right)^{2k} - \ldots + (-1)^n \frac{E_o - E_\infty}{n!}\left(\frac{t}{\tau}\right)^{nk} + \ldots \qquad (10)$$

Переходя к изображениям, получаем

$$L(E(t)) = \frac{E_o}{p} - \frac{E_o - E_\infty}{\tau^k}\frac{\Gamma(k+1)}{p^{k+1}} + \frac{E_o - E_\infty}{2!\tau^{2k}}\frac{\Gamma(2k+1)}{p^{2k+1}} + \ldots + (-1)^n \frac{E_o - E_\infty}{n!\tau^{nk}}\frac{\Gamma(nk+1)}{p^{nk+1}} + \ldots\ .$$

Для значений t, меньших τ, в последнем равенстве имеем

$$L(E(t)) \approx L\left(E_o - E_\infty)\left(\frac{t}{\tau}\right)^k\right) = \frac{E_o}{p} - \frac{E_o - E_\infty}{\tau^k}\frac{\Gamma(k+1)}{p^{k+1}}\,.$$

Тогда (9) примет вид

$$L(D(t)) \approx \frac{1}{E_o}\left(\frac{1}{p} + \left(1 - \frac{E_\infty}{E_o}\right)\frac{\Gamma(k+1)}{\tau^k p^{k+1}} + \right.$$

$$\left. + \left(1 - \frac{E_\infty}{E_o}\right)^2 \frac{\Gamma^2(k+1)}{\tau^{2k} p^{2k+1}} + \ldots + \left(1 - \frac{E_\infty}{E_o}\right)^n \frac{\Gamma^n(k+1)}{\tau^{nk} p^{nk+1}} + \ldots\right).$$

Отсюда, перейдя к оригиналам, получим

$$D(t) \approx \frac{1}{E_o}\left(1+\left(1-\frac{E_\infty}{E_o}\right)\left(\frac{t}{\tau}\right)^k+\left(1-\frac{E_\infty}{E_o}\right)^2\frac{\Gamma^2(k+1)}{\Gamma(2k+1)}\left(\frac{t}{\tau}\right)^{2k}\ldots+\left(1-\frac{E_\infty}{E_o}\right)^n\frac{\Gamma^n(k+1)}{\Gamma(nk+1)}\left(\frac{t}{\tau}\right)^{nk}+\ldots\right). \quad (11)$$

Учитывая, что $\varphi(t) \approx \left(\frac{t}{\tau}\right)^k$ и отбрасывая члены более малого порядка, записываем

$$D(t) \approx \frac{1}{E_o}+\frac{E_o-E_\infty}{E_o^2}\varphi(t)=\frac{1}{E_o}+\frac{E_o-E(t)}{E_o^2}=\frac{2E_o-E(t)}{E_o^2}. \quad (12)$$

Аналогично, из (4) и (5):

$$E(t) \approx \frac{2D_o-D(t)}{D_o^2}. \quad (13)$$

Полученные формулы (12) и (13) дают возможность выразить ядро релаксации через ядро ползучести и наоборот. Введение ограничений на малость времени t по сравнению со временем релаксации τ позволило аналитически получить решение интегральных уравнений (6), (7) и (8).

Процессы релаксации и ползучести, задаваемые формулами (3), (4), обладают асимптотической симметрией относительно $\lg\frac{t}{\tau}$ [4], что позволяет априорно предположить справедливость формул, аналогичных (12), (13), для больших моментов времени t:

$$D(t)=\frac{2E_\infty-E(t)}{E_\infty^2}, \quad (14)$$

$$E(t)=\frac{2D_\infty-D(t)}{D_\infty^2}. \quad (15)$$

Остается аналитически не исследованной центральная часть логарифмической шкалы $\lg\frac{t}{\tau}$. Здесь следует заметить, что $E(t)\Big|_{t=\tau}=\frac{E_o+E_\infty}{2}$ и $D(t)\Big|_{t=\tau}=\frac{D_o+D_\infty}{2}$.

Таким образом, зная значение τ, мы можем линейно аппроксимировать E(t) и D(t) в центральной части логарифмической шкалы.

В заключение приведем пример взаимопересчета вязкоупругих характеристик релаксации и ползучести для тканых капроновых лент ТК-15.

По экспериментальным значениям модулей релаксации E и податливости D с помощью формул (12), (13) определим расчетные значения податливости $\underline{D}$ и релаксации $\underline{E}$ (табл.1.).

Т а б л и ц а 1

lg(t/τ)	EF (кН)	D/F (1/кН)	$\underline{D}$/F (1/кН)	$\underline{E}$F (кН)
- ∞	E_o=65	D_o=0,0154	0,0155	65,0
-3	63,5	0,0157	0,0160	63,7
-2,5	62	0,0161	0,0163	62,0
-2	58	0,0170	0,0170	58,0
-1,5	54	0,0187	0,0181	50,0
-1	50	0,0203	0,0199	47,4
-0,5	46	0,022	0,0217	44,7
0	42,5	0,0235	0,0233	42,4
0,5	39	0,0252	0,0249	39,7
1	35	0,0268	0,0268	37,2
1,5	33	0,0284	0,0277	34,7
2	32,5	0,0302	0,0325	32,5
2,5	32	0,0308	0,0330	32,0
3	31,5	0,0314	0,0335	31,6
+ ∞	E_∞=28,5	D_∞=0,0351	0,0338	28,7

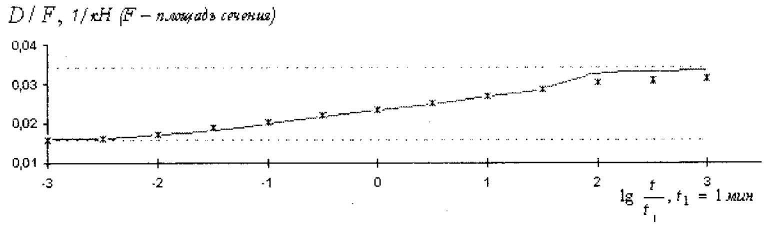

Рис.1

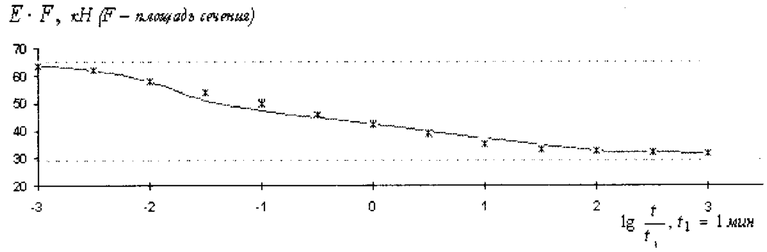

Рис.2

На рис.1 представлен график зависимости $\underline{D}\left(\lg\left(\frac{t}{\tau}\right)\right)$, а на рис.2 – график зависимости $\underline{E}\left(\lg\left(\frac{t}{\tau}\right)\right)$ для ткани ТК-15(--- – расчет; * – эксперимент).

Сравнив полученные графики с экспериментом, убеждаемся (табл.1), что расчетные значения модуля релаксации $\underline{E}$ близки к значениям E, измеренным непосредственно из опыта, а значения $\underline{D}$ близки к значениям D.

ВЫВОДЫ

1. Предложен вариант приближенного аналитического решения задачи о резольвенте определяющих интегральных уравнений процессов релаксации и ползучести текстильных материалов, полученный при условии линейности вязкоупругих свойств.

2. Полученный результат позволяет рассчитывать параметры процесса релаксации по параметрам процесса ползучести и наоборот.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Сталевич А.М.* // Изв. вузов. Технология легкой промышленности.–1981, № 3. С. 18...22.

2. *Макаров А.Г., Сталевич А.М.* // Вестник СПГУТД.–1999, № 3. С. 34...40.

3. *Макаров А.Г.* // Изв. вузов. Технология текстильной промышленности. – 2000, № 2. С. 12...16.

4. *Сталевич А.М., Макаров А.Г.* // Изв. вузов. Технология текстильной промышленности. – 2000, № 3. С. 8...13.

Рекомендована кафедрой сопротивления материалов. Поступила 10.01.02.