

АНИЗОТРОПИЯ ОДИНОЧНЫХ И СКРУЧЕННЫХ В ДВА И БОЛЕЕ СЛОЖЕНИЯ НИТЕЙ

ANISOTROPY OF THE STRINGS SINGLE AND BRAIDED IN TWO AND MORE ADDITIONS

В.П. ЩЕРБАКОВ, Н.С. СКУЛАНОВА, Т.И. ПОЛЯКОВА, С.Л. ХАЛЕЗОВ

V.P. SCHERBAKOV, N.S. SKULANOVA, T.I. POLJAKOVA, S.L. KHALEZOV

(Российский государственный университет имени А.Н. Косыгина (Технологии. Дизайн. Искусство),
Ивановский государственный политехнический университет)

(Russian State University named after A.N. Kosygin (Technologies. Design. Art),
Ivanovo State Polytechnical University)

E-mail: victor.scherbackow2012@yandex.ru

Изложен новый подход к проектированию нитей, основанный на методах усреднения, матричных и тензорных преобразованиях теорий анизотропного тела. Рассмотрено напряженно-деформированное состояние скрученной в несколько сложений нити, обусловленное механическими свойствами, геометрией индивидуальных волокон и одиночных нитей. Определены предел прочности и модуль упругости нити при вычисленных элементах матрицы внутренней жесткости нити. Для вычисления модуля упругости одиночной нити в составе скрученной нити, определяющего ее прочность, получены все необходимые постоянные жесткости нити.

The condition of the string braided in some additions caused by mechanical properties, geometry of individual fibres and single strings is considered is intense - deformed. Methods of averaging, matrix and тензорные transformations of theories of an anisotropic body are used. Strength of a string and the module of elasticity of a string are determined at the calculated elements of a matrix of internal rigidity of a string. For calculation of the module of elasticity of a single string in structure of the braided string, determining its(her) durability, all necessary constants of rigidity of a string are received.

Ключевые слова: нить, анизотропия, модуль упругости, жесткость, кручение, предел прочности, матрица внутренней жесткости.

Keywords: string, anisotropy, module of elasticity, rigidity, torsion, strength, matrix of internal rigidity.

Наряду с теориями J.W.S. Hearle [1], В.П. Щербакова [2], [3] расчет прочности одиночных и скрученных в несколько сложений нитей, обусловленной свойствами и геометрией индивидуальных волокон, возможен другой подход к проектированию, основанный на методах усреднения, матричных и тензорных преобразованиях теорий анизотропного тела.

В соответствии с методами анализа J.W.S. Hearle отношение предела прочности нити σ_{y*} к пределу прочности волокна σ_{f*} равно отношению модуля упругости нити E_y к модулю упругости волокна E_f и представляет собой безразмерную функцию $\tilde{\sigma}_y(\beta, \nu_f, \nu_y)$:

$$\frac{\sigma_{y^*}}{\sigma_{f^*}} = \frac{E_y}{E_f} = \frac{2\cos^2\beta}{(1+2\nu_f)(1-\cos^2\beta)} \left\{ \begin{array}{l} (1+\nu_y) \left[\ln\cos\beta + \frac{2(1+\nu_f)}{1+2\nu_f} (1-\cos\beta)^{2\nu_f+1} \right] - \\ - \frac{\nu_y}{2} \left[\frac{3(1+2\nu_f)}{2\nu_f-1} - \frac{4(1+\nu_f)}{2\nu_f-1} (\cos\beta)^{2\nu_f-1} - \frac{1}{\cos^2\beta} \right] \end{array} \right\}. \quad (1)$$

Здесь β – угол кручения, ν_f – коэффициент Пуассона волокна, ν_y – коэффициент Пуассона нити. Если принять коэффициент Пуассона нити $\nu_y=0,5$ и равный ему коэффициент Пуассона волокна, то формула (1), определяющая прочность нити, преобразуется к виду:

$$\frac{\sigma_{y^*}}{\sigma_{f^*}} = \frac{E_y}{E_f} = \frac{1}{4} + \frac{9}{4} \cos^2\beta + \frac{3\cos^2\beta}{1-\cos^2\beta} \ln\cos\beta. \quad (2)$$

В простейшем случае, не учитывающем ни изменения диаметра нити, ни действия поперечных сил, предел прочности нити определяется формулой

$$\sigma_{y^*} = \sigma_{f^*} \cos^2\beta. \quad (3)$$

Если свойства образца, вырезанного из материала, не зависят от его ориентации, то

$$\sigma_{11} = C_{1111}\varepsilon_{11} + C_{1112}\varepsilon_{12} + C_{1113}\varepsilon_{13} + C_{1121}\varepsilon_{21} + C_{1122}\varepsilon_{22} + C_{1123}\varepsilon_{23} + C_{1131}\varepsilon_{31} + C_{1132}\varepsilon_{32} + C_{1133}\varepsilon_{33},$$

Число независимых констант на самом деле будет меньше 81. Из симметрии тензоров σ_{ij} и ε_{ij} следует, что тензор модулей упругости C_{ijkl} не меняется при перестановке индексов i и j , k и ℓ . В результате оказывается, что из 81 компоненты тензора четвертого ранга в трехмерном пространстве различными остаются только 36 компонент. Это константы, связывающие 6 различных компонент σ_{ij} с шестью различ-

ными компонентами ε_{kl} . Их удобно расположить в виде матрицы 6×6 . Пронумеруем компоненты тензора напряжений и тензора деформаций, заменяя индексы в следующем порядке:
тензорные индексы: 11 22 33 12,21 13,31 23,32
матричные индексы: 1 2 3 4 5 6.
Перепишем тензоры напряжений и деформаций:

$$\sigma_{ij} = C_{ijkl} \varepsilon_{kl}; \quad i, j, k, l = 1, 2, 3. \quad (4)$$

Здесь C_{ijkl} – константы упругости материала, число которых равно 81. В развернутом виде уравнения выглядят следующим образом:

$$\begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33} \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} \sigma_1 & \sigma_4 & \sigma_5 \\ \sigma_4 & \sigma_2 & \sigma_6 \\ \sigma_5 & \sigma_6 & \sigma_3 \end{bmatrix}; \quad \begin{bmatrix} \varepsilon_{11} & \varepsilon_{12} & \varepsilon_{13} \\ \varepsilon_{21} & \varepsilon_{22} & \varepsilon_{23} \\ \varepsilon_{31} & \varepsilon_{32} & \varepsilon_{33} \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} \varepsilon_1 & \frac{1}{2}\varepsilon_4 & \frac{1}{2}\varepsilon_5 \\ \frac{1}{2}\varepsilon_4 & \varepsilon_2 & \frac{1}{2}\varepsilon_6 \\ \frac{1}{2}\varepsilon_5 & \frac{1}{2}\varepsilon_6 & \varepsilon_3 \end{bmatrix}.$$

В новых обозначениях уравнения записываются в виде:

$$\begin{aligned}\sigma_1 &= C_{11}\varepsilon_1 + C_{12}\varepsilon_2 + C_{13}\varepsilon_3 + C_{14}\varepsilon_4 + C_{15}\varepsilon_5 + C_{16}\varepsilon_6; \\ &\dots\dots\dots \\ \sigma_4 &= C_{41}\varepsilon_1 + C_{42}\varepsilon_2 + C_{43}\varepsilon_3 + C_{44}\varepsilon_4 + C_{45}\varepsilon_5 + C_{46}\varepsilon_6.\end{aligned}$$

Постоянные жесткости нити C_{ij} обусловлены свойствами волокон и расположением их в нити. Геометрическую модель нити можно представить в форме прямых полых круговых цилиндров радиуса r , в которых волокна расположены по винтовым линиям с постоянным шагом h [1...3]. Шаг винтовой линии h не зависит от текущего радиуса нити r . Угол подъема винтовой линии, то есть угол между касательной к винтовой линии и образующей цилиндра, равен ϑ . Определение предела прочности нити σ_{y*} предполагает знание модуля упругости нити E_y , если известны элементы матрицы внутренней жесткости нити $[C_{ij}]$.

Учитывая структуру нитей, а также принимая во внимание условия их формирования, нити можно с достаточным приближением к реальности рассматривать как тело, через каждую точку которого проходит ось упругой симметрии – ось вращения. Типичным элементом объема будет шестигранная призма, окружающая одно центральное волокно. Нить обладает гексагональной симметрией, в каждой точке нити имеется одно главное направление и бесконечное множество главных направлений в плоскости, нормальной к первому. Такое тело называется трансверсально-изотропным или монотропным. В нем через все точки проходят параллельные плоскости упругой симметрии, в которых все направления являются упруго-эквивалентными (плоскости изотропии). Зависимости между напряжениями и деформациями выражаются с помощью пяти упругих модулей. Если ось x_1 направить вдоль оси нити, то соотношения упругости для нити как трансверсально-изотропного тела запишутся в виде:

$$\begin{bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \sigma_4 \\ \sigma_5 \\ \sigma_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{12} & 0 & 0 & 0 \\ C_{12} & C_{22} & C_{23} & 0 & 0 & 0 \\ C_{12} & C_{23} & C_{22} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & C_{44} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2}(C_{22} - C_{23}) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \\ \varepsilon_4 \\ \varepsilon_5 \\ \varepsilon_6 \end{bmatrix}. \quad (5)$$

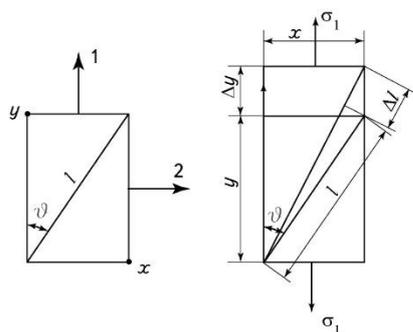


Рис. 1

Для определения постоянной жесткости C_{11} рассматриваем деформирование нити в направлении 1 под действием напряжения σ_1 (рис. 1 – к определению C_{11}). Составляем уравнения совместности деформаций:

$(l_f + \Delta l_f)^2 = (y + \Delta y)^2 + x^2$. Здесь значения x , y без индексов относятся к нити в целом. Преобразуем уравнение к виду

$$\left(1 + \frac{\Delta l_f}{l_f}\right)^2 = \left(1 + \frac{\Delta y}{y}\right)^2 \left(\frac{y}{l_f}\right)^2 + \left(\frac{x}{l_f}\right)^2.$$

Деформация волокна равна $\varepsilon_f = \frac{\Delta l_f}{l_f}$,

деформация нити в продольном направлении – $\varepsilon_1 = \frac{\Delta y}{y}$. Можно написать

$$(1 + \varepsilon_f)^2 = (1 + \varepsilon_1)^2 \cos^2 \theta + \sin^2 \theta.$$

Пренебрегая квадратами деформаций, получим:

$$\varepsilon_f = \varepsilon_1 \cos^2 \vartheta. \quad (6)$$

Эта формула написана для отдельного волокна, ориентированного под углом ϑ относительно оси x_1 нити. Угол ориентации отдельного волокна ϑ , равный углу подъема винтовой линии, изменяется вдоль радиуса, достигая на поверхности нити ради-

$$C_{22} = E_f \left(1 + \cos^2 \beta + \frac{4 \ln \cos \beta}{\operatorname{tg}^2 \beta} \right), \quad C_{12} = E_f \nu \left(1 + \cos^2 \beta + \frac{4 \ln \cos \beta}{\operatorname{tg}^2 \beta} \right). \quad (8)$$

В последней формуле ν – коэффициент Пуассона нити. Упругий модуль $C_{23} = 0$, а постоянная C_{66} не является независимой и равна $C_{66} = \frac{1}{2}(C_{22} - C_{23})$. Для трансверсально-изотропного тела действительно соотношение $\nu = \frac{C_{12}}{C_{22} - C_{23}}$, и это соответствует найденным упругим постоянным.

Если известны элементы матрицы внутренней жесткости нити $[C_{ij}]$, то можно найти модуль упругости нити, который обозначим через E_1 . Для этого рассмотрим одноосное растяжение нити вдоль оси x_1 . Уравнения равновесия в нашем случае принимают вид:

$$\begin{aligned} \sigma_1 &= C_{11} \varepsilon_1 + C_{12} \varepsilon_2 + C_{12} \varepsilon_2, \\ 0 &= C_{12} \varepsilon_1 + C_{22} \varepsilon_2, \\ 0 &= C_{12} \varepsilon_1 + C_{22} \varepsilon_2. \end{aligned} \quad (9)$$

Так как модуль упругости нити представляет собой коэффициент пропорциональности между напряжением σ_1 и деформацией ε_1 , то формула для определения модуля упругости нити принимает вид:

$$E_1 = E_f \left(C_{11} - \frac{2C_{12}^2}{C_{22}} \right),$$

или

уса R величины β . Определив модуль упругости нити [1...3], находим:

$$C_{11} = E_f \cos^2 \beta. \quad (7)$$

Схема определения остальных компонент матрицы жесткости $[C_{ij}]$ остается той же. Вывод формул подробно приведен в [2]. Здесь же запишем основные соотношения C_{ij} :

$$E_1 = E_f \left[\cos^2 \beta - 2\nu^2 \left(1 + \cos^2 \beta + \frac{4 \ln \cos \beta}{\operatorname{tg}^2 \beta} \right) \right]. \quad (10)$$

Отношение предела прочности нити к пределу прочности волокна равно отношению модуля упругости нити к модулю упругости волокна и составляет:

$$\frac{\sigma_1^*}{\sigma_f^*} = \frac{E_1}{E_f} = \left[\cos^2 \beta - 2\nu^2 \left(1 + \cos^2 \beta + \frac{4 \ln \cos \beta}{\operatorname{tg}^2 \beta} \right) \right]. \quad (11)$$

Отсюда находим предел прочности нити:

$$\sigma_1^* = \sigma_f^* \left[\cos^2 \beta - 2\nu^2 \left(1 + \cos^2 \beta + \frac{4 \ln \cos \beta}{\operatorname{tg}^2 \beta} \right) \right]. \quad (12)$$

При переходе от напряжений к нагрузкам (прочности нити) напомним особенности внутренних сил в нити и пряже. Рассматривая напряжение как внутреннюю силу, приложенную к волокну, а не к нити со свободным пространством между волокнами, отметим, что определять напряжение в нити и пряже как отношение силы к площади поперечного сечения пряжи (нити) $\pi d^2/4$ нельзя, так как нагрузку воспринимают только волокна, а в эту формулу площади входят и воздушные пустоты в нити. Нужно учесть лишь площадь волокон, попадающих в поперечное сечение нити, при-

нимая во внимание и расположение волокон под углом к оси нити, и различную ориентацию волокон в радиальном направлении. Предпочтительно использовать удельное напряжение как силу, отнесенную к массе единицы длины. Единицей удельного напряжения является Н/текс. Связь между обычным напряжением σ и удельным σ_s выражается формулой $\sigma = \sigma_s / \nu_y$ (ν_y – удельный объем нити, то есть величина, обратная плотности). Принимая за единицу плотности 1 г/см³, единицу напряжения получаем равной 1 ГПа: удельное напряжение 1 Н/текс = плотность (г/см³) × напряжение 1 ГПа.

Изложенная здесь теория позволяет рассмотреть напряженно-деформированное состояние таких сложных структур, как скрученные между собой в два и более сложений одиночные нити.

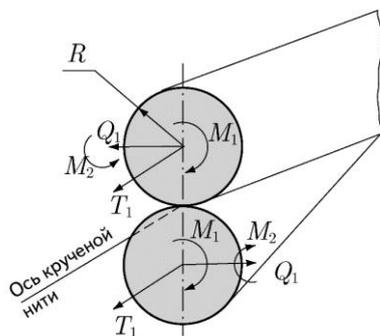


Рис. 2

Скрученная нить представляет собой две одинаковые, вписанные одна в другую винтовые линии, радиус осевой линии каждой из которых равен радиусу поперечного сечения нити (рис. 2 – к равновесию крученой нити). Сечение каждой из двух нитей представляет собой круг радиусом R , а осевая линия нити – винтовую линию с углом подъема α и радиусом, равным радиусу поперечного сечения крученой нити, то есть тоже R . Кривизна винтовой линии является постоянной и равна $\kappa_3 = \sin^2 \alpha / R$, кручение – $\kappa_1 = \sin \alpha \cos \alpha / R$. У винтовой линии главная нормаль ν пересекает ось нити под прямым углом и совпадает с ее радиусом. Возьмем на поверхности одной нити точку. Вследствие свойств винтовой линии нор-

маль ν в этой точке является одновременно нормалью к поверхности второй изогнутой по винтовой линии нити. Ось крученой нити является прямой линией контакта нитей. Построим на этой оси вспомогательный цилиндр радиусом R . На поверхности этого цилиндра будут расположены винтовые осевые упругие линии одиночных нитей. Рассмотрим, как преобразуется матрица коэффициентов $[C_{ij}]$ при переходе к другим осям координат, связанным с осью крученой нити.

Введем ортогональную систему координат, связанную с осевой линией упругой линии. Три вектора: касательная τ , главная нормаль ν и бинормаль β , образуют естественный трехгранник винтовой линии. Главная нормаль к винтовой линии во всех ее точках совпадает с нормалью к цилиндру. В некоторой точке на упругой линии зададим цилиндрическую систему координат (e_x, e_r, e_ϕ) . Расположим оси таким образом, чтобы ось ν естественного трехгранника совпала с осью e_r , направленной к центру нити, а ось e_x направим вдоль оси нити. Цилиндрические оси образуют правую тройку векторов, повернутых относительно оси ν , совпадающей с направлением оси e_r , на угол α . Выражения, позволяющие переходить от одного ортогонального базиса к другому, имеют вид:

$$e_x = e_\tau \cos \alpha + e_\beta \sin \alpha, \quad e_r = e_\nu, \quad e_\phi = -e_\tau \sin \alpha + e_\beta \cos \alpha.$$

Соответствующая матрица перехода запишется в виде:

$$l_{ij} = \begin{matrix} e_x \\ e_r \\ e_\phi \end{matrix} \begin{bmatrix} e_\tau & e_\nu & e_\beta \\ \cos \alpha & 0 & \sin \alpha \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin \alpha & 0 & \cos \alpha \end{bmatrix}.$$

Матрица коэффициентов жесткости C_{ij} при переходе от упругой линии одиночной нити к крученой нити преобразуется по формуле $C_{ij}^* = C_{ik} g_{ij} g_{lk}$. Коэффициенты g_{ij} (i – номер строки, j – номер столбца) имеют значения, приведенные в табл. 1.

i \ j	1	2	3	4	5	6
1	$\cos^2 \alpha$	0	$\sin^2 \alpha$	0	$2 \sin \alpha \cos \alpha$	0
2	0	1	0	0	0	0
3	$\sin^2 \alpha$	0	$\cos^2 \alpha$	0	$-2 \sin \alpha \cos \alpha$	0
4	0	0	0	$\cos \alpha$	0	$\sin \alpha$
5	$-\sin \alpha \cos \alpha$	0	$\sin \alpha \cos \alpha$	0	$\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha$	0
6	0	0	0	$-\sin \alpha$	0	$\cos \alpha$

В результате преобразования матрицы $[C_{ij}]$ коэффициентов жесткости одиночной нити, ориентированной под углом α относительно оси x_1 скрученной нити, получим элементы матрицы $[C_{ij}]$ внутренней жесткости упругой винтовой линии. Для вычисления модуля упругости E_1^α следует определить все необходимые постоянные жесткости нити. Уравнения равновесия при одноосном растяжении крученой нити в данном случае имеют вид, аналогичный системе (9):

$$\sigma_1 = C_{11}^\alpha \varepsilon_1 + C_{12}^\alpha \varepsilon_2 + C_{13}^\alpha \varepsilon_3,$$

$$0 = C_{12}^\alpha \varepsilon_1 + C_{22}^\alpha \varepsilon_2 + C_{23}^\alpha \varepsilon_3,$$

$$0 = C_{13}^\alpha \varepsilon_1 + C_{23}^\alpha \varepsilon_2 + C_{33}^\alpha \varepsilon_3.$$

Теперь формула для определения модуля упругости одиночной нити в составе скрученной нити принимает вид:

$$E_1^\alpha = C_{11}^\alpha \frac{(C_{12}^\alpha)^2 C_{33}^\alpha + (C_{13}^\alpha)^2 C_{22}^\alpha - 2C_{12}^\alpha C_{13}^\alpha C_{23}^\alpha}{C_{22}^\alpha C_{33}^\alpha - (C_{23}^\alpha)^2}. \quad (13)$$

В соответствии с формулой (13) и табл. 1 коэффициентов g_{ij} запишем:

$$\begin{aligned} C_{11}^\alpha &= C_{11} \cos^4 \alpha + C_{13} \sin^2 \alpha \cos^2 \alpha + C_{31} \sin^2 \alpha \cos^2 \alpha + C_{33} \sin^4 \alpha + 4C_{55} \sin^2 \alpha \cos^2 \alpha = \\ &= E_f \left[\cos^2 \beta \cos^4 \alpha + 2\nu \left(1 + \cos^2 \beta + \frac{4 \ln \cos \beta}{\operatorname{tg}^2 \beta} \right) \sin^2 \alpha \cos^2 \alpha + \right. \\ &\quad \left. + \left(1 + \cos^2 \beta + \frac{4 \ln \cos \beta}{\operatorname{tg}^2 \beta} \right) \sin^4 \alpha - 4 \left(\cos^2 \beta + \frac{2 \ln \cos \beta}{\operatorname{tg}^2 \beta} \right) \sin^2 \alpha \cos^2 \alpha \right], \\ C_{22}^\alpha &= C_{22} = E_f \left(1 + \cos^2 \beta + \frac{4 \ln \cos \beta}{\operatorname{tg}^2 \beta} \right), \\ C_{33}^\alpha &= C_{11} \sin^4 \alpha + C_{13} \sin^2 \alpha \cos^2 \alpha + C_{31} \sin^2 \alpha \cos^2 \alpha + C_{33} \cos^4 \alpha + \\ &+ C_{55} 4 \sin^2 \alpha \cos^2 \alpha = E_f \cos^2 \beta \sin^4 \alpha + 2E_f \nu \left(1 + \cos^2 \beta + \frac{4 \ln \cos \beta}{\operatorname{tg}^2 \beta} \right) \sin^2 \alpha \cos^2 \alpha + \\ &+ E_f \left(1 + \cos^2 \beta + \frac{4 \ln \cos \beta}{\operatorname{tg}^2 \beta} \right) \cos^4 \alpha + 4E_f \left(-\cos^2 \beta - \frac{2 \ln \cos \beta}{\operatorname{tg}^2 \beta} \right) \sin^2 \alpha \cos^2 \alpha. \\ C_{12}^\alpha &= C_{12} \cos^2 \alpha + C_{32} \sin^2 \alpha = E_f \nu \left(1 + \cos^2 \beta + \frac{4 \ln \cos \beta}{\operatorname{tg}^2 \beta} \right), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
C_{13}^{\alpha} &= C_{11} \sin^2 \alpha \cos^2 \alpha + C_{13} \cos^4 \alpha + C_{31} \sin^4 \alpha + C_{33} \sin^2 \alpha \cos^2 \alpha + \\
&+ C_{55} (-4 \sin^2 \alpha \cos^2 \alpha) = E_f \cos^2 \beta \sin^2 \alpha \cos^2 \alpha + \\
&+ E_f \nu \left(1 + \cos^2 \beta + \frac{4 \ln \cos \beta}{\operatorname{tg}^2 \beta} \right) (\sin^4 \alpha + \cos^4 \alpha) + \\
&+ E_f \left(1 + \cos^2 \beta + \frac{4 \ln \cos \beta}{\operatorname{tg}^2 \beta} \right) \sin^2 \alpha \cos^2 \alpha - 4 E_f \left(-\cos^2 \beta - \frac{2 \ln \cos \beta}{\operatorname{tg}^2 \beta} \right) \sin^2 \alpha \cos^2 \alpha, \\
C_{23}^{\alpha} &= C_{21} \sin^2 \alpha + C_{23} \cos^2 \alpha = E_f \nu \left(1 + \cos^2 \beta + \frac{4 \ln \cos \beta}{\operatorname{tg}^2 \beta} \right).
\end{aligned}$$

Итак, модуль E_1^{α} найден, и в соответствии с написанным в начале статьи планом решения можно проводить расчеты на прочность и жесткость скрученной нити, причем изложенная теория не ограничивает ни число сложений, ни расположение компонентов относительно оси крученой нити.

Рассмотрим пример. Одиночная вискозно-шерстяная пряжа линейной плотности 110 текс с круткой $K_0 = 350 \text{ м}^{-1}$ скручивается в два сложения; вторичная крутка

$K_k = 200 \text{ м}^{-1}$. Модули упругости волокон равны: $E_{f \text{ виск}} = 1,237 \cdot 10^5 \text{ сН/мм}^2$, $E_{f \text{ шерст}} = 4,767 \cdot 10^4 \text{ сН/мм}^2$. Доля вискозного компонента по массе составляет $\alpha_{\text{вискоза}} = 0,35$, шерстяного – $\alpha_{\text{шерсть}} = 0,65$. Пересчитаем вклад каждого вида волокна по их числу [5]: $\beta_{\text{mf виск}} = 0,363$, $\beta_{\text{mf шерст}} = 0,637$. Получим средний модуль упругости, определяющийся достаточно точно по правилу смесей:

$$E_f = E_{f \text{ виск}} \beta_{\text{mf виск}} + E_{f \text{ шерст}} \beta_{\text{mf шерст}} = 7,526 \cdot 10^4.$$

Углы кручения:

$$\begin{aligned}
\beta &= \arctg(2\pi R K_0) = 0,507 \text{ рад}, \\
\alpha &= \arctg(2\pi R K_k) = 0,307 \text{ рад}.
\end{aligned}$$

Коэффициенты жесткости C_{ij} :

$$\begin{aligned}
C_{11} &= 5,753 \cdot 10^4; \quad C_{22} = 1,584 \cdot 10^3; \\
C_{12} &= 791,897.
\end{aligned}$$

Элементы матрицы C_{ij}^{α} внутренней жесткости упругой винтовой линии:

$$\begin{aligned}
C_{11}^{\alpha} &= 5,032 \cdot 10^4; \quad C_{12}^{\alpha} = 791,897; \\
C_{13}^{\alpha} &= 2,888 \cdot 10^3; \quad C_{22}^{\alpha} = 1,584 \cdot 10^3;
\end{aligned}$$

$$C_{23}^{\alpha} = 791,897; \quad C_{33}^{\alpha} = 4,602 \cdot 10^3.$$

Окончательно, в соответствии с формулой (13), получаем значение модуля упругости одиночной нити в составе скрученной нити: $E_1^{\alpha} = 4,845 \cdot 10^4 \text{ сН/мм}^2$.

Соотношение (1) определяет предел прочности нити:

$$\sigma_y^* = \sigma_f^* \frac{E_y}{E_f}. \quad (14)$$

Как уже было отмечено в начале статьи, отношение модулей упругости нити и волокна представляет собой безразмерную функцию (1):

$$\tilde{\sigma}_y(\beta, \nu_f, \nu_y) = \frac{2\cos^2\beta}{(1+2\nu_f)(1-\cos^2\beta)} \left\{ \begin{array}{l} (1+\nu_y) \left[\operatorname{Incos}\beta + \frac{2(1+\nu_f)}{1+2\nu_f} (1-(\cos\beta)^{2\nu_f+1}) \right] - \\ - \frac{\nu_y}{2} \left[\frac{3(1+2\nu_f)}{2\nu_f-1} - \frac{4(1+\nu_f)}{2\nu_f-1} (\cos\beta)^{2\nu_f-1} - \frac{1}{\cos^2\beta} \right] \end{array} \right\}.$$

В нашем примере численное значение $\tilde{\sigma}_y(\beta, \nu_f, \nu_y) = 0,68$. Учтем расположение одиночной нити в составе скрученной, умножив $\tilde{\sigma}_y(\beta, \nu_f, \nu_y)$ на $\cos^2\alpha$. Оконча-

тельно получим 0,62. Если рассматривать нить как анизотропный материал, чему и посвящена настоящая статья, то отношение модулей скрученной нити и волокна равно

$$\frac{E_1^\alpha}{E_f} = \frac{1}{E_f} \left[C_{11}^\alpha - \frac{(C_{12}^\alpha)^2 C_{33}^\alpha + (C_{13}^\alpha)^2 C_{22}^\alpha - 2C_{12}^\alpha C_{13}^\alpha C_{23}^\alpha}{C_{22}^\alpha C_{33}^\alpha - (C_{23}^\alpha)^2} \right] = 0,64.$$

Результаты обоих подходов, как видно из приведенных решений, хорошо согласуются между собой. Данная модель нити как анизотропного тела не приводит к значительному различию или улучшению результатов по сравнению с другими теориями. Тем не менее, она иллюстрирует важную и полезную методологию рассмотрения сложных структур нитей. Как уже отмечалось, изложенная теория не ограничивает ни число сложений, ни расположение компонентов относительно оси крученой нити.

ВЫВОДЫ

1. Реализован новый подход к проектированию как одиночных, так и скрученных в любое число сложений нитей, основанный на методах усреднения, матричных и тензорных преобразованиях теорий анизотропного тела.

2. Определены предел прочности и модуль упругости нити при вычисленных элементах матрицы внутренней жесткости нити.

3. Для вычисления модуля упругости одиночной нити в составе скрученной, определяющего ее прочность, получены все необходимые постоянные жесткости нити.

ЛИТЕРАТУРА

1. Hearle J.W.S., Grosberg P., Backer S. Structural Mechanics of Fibers, Yarns and Fabrics. – New York, 1969.
2. Щербаков В.П. Прикладная и структурная механика волоконистых материалов. – М.: "Тисо Принт", 2013.
3. Щербаков В.П., Скуланова Н.С. Основы теории деформирования и прочности текстильных материалов. – М.: МГТУ имени А.Н. Косыгина, 2008.
4. Малмейстер А.К., Тамуж В.П., Тетерс Г.А. Сопротивление жестких полимерных материалов. – Рига: "Зинатне", 1972.
5. Механическая технология текстильных материалов/Севостьянов А.Г., Осмин Н.А., Щербаков В.П. и др. – М.: Легпромбытиздат, 1989.

REFERENCES

1. Hearle J.W.S., Grosberg P., Backer S. Structural Mechanics of Fibers, Yarns and Fabrics. – New York, 1969.
2. Shcherbakov V.P. Prikladnaya i strukturnaya mekhanika voloknistykh materialov. – М.: "Tiso Print", 2013.
3. Shcherbakov V.P., Skulanova N.S. Osnovy teorii deformirovaniya i prochnosti tekstil'nykh materialov. – М.: MGТУ imeni A.N. Kosygina, 2008.
4. Malmeyster A.K., Tamuzh V.P., Teters G.A. Soпротивlenie zhestkikh polimernykh materialov. – Riga: "Zinatne", 1972.
5. Mekhanicheskaya tekhnologiya tekstil'nykh materialov/Sevost'yanov A.G., Os'min N.A., Shcherbakov V.P. i dr. – М.: Legprombytizdat, 1989.

Рекомендована кафедрой текстильных технологий РГУ имени А.Н. Косыгина. Поступила 15.12.20.