УДК 677.017.622:[677.017.56:536.21]

МЕТОД РАСЧЕТА ВОЗДУХОПРОНИЦАЕМОСТИ ТКАНЕЙ В ОКРЕСТНОСТИ ПЕРЕДНЕЙ КРИТИЧЕСКОЙ ТОЧКИ В УСЛОВИЯХ ОБДУВА (ВЕТРА)

И.П. КОРНЮХИН, И.В. ПЯТЕНКОВ

(Московский государственный текстильный университет им. А.Н. Косыгина)

Настоящая статья посвящена исследованию воздухопроницаемости тканей и пакетов тканей в условиях обдува (ветра). Ранее поставлены задачи исследования [1], определены значения продольной и поперечной составляющих коэффициента проницаемости [2]. Найдены и теоретически обоснованы поля давлений в окрестности передней критической точки, а также получены значения скоростей фильтрации воздуха через ткань в режимах обдува, когда под образцом ткани существует избыточное давление, и в режиме обдува с прососом, когда давление под тканью равно атмосферному [3]. Показано также, что в широком диапазоне изменения скоростей набегающего потока наблюдается линейный характер зависимости между скоростью фильтрации и перепадом давления на ткани [3].

В работе предлагаются два метода расчета воздухопроницаемости тканей в окрестности критической точки: первый – упрощенный – основан на учете только поперечной фильтрации воздуха через ткань, второй – строгий – учитывает фильтрацию как в поперечном, так и в продольном направлениях.

Рассмотрим первый из этих методов. Возможность его использования обосновывается следующими оценками порядка величин. Для установки, описанной в [2,3], на основе данных, полученных в [3], отношение составляющих градиента давления grad p в продольном и поперечном направлениях по порядку величины равно 10^{-2}; отношение продольной и поперечной составляющих вектора k grad p (k – коэффициент проницаемости по Дарси), характеризующих продольную и поперечную составляющие скорости по порядку величины, равно 0,5. Таким образом, в окрестности критической точки преобладает фильтрация в поперечном направлении.

Для расчета используются найденное в [3] поле давлений над образцом $p(r, w_\infty)$ (r – текущее значение радиуса, отсчитываемое от центра образца; w_∞ – скорость набегающего потока воздуха) и величина давления под образцом p_0 (в режиме обдува с прососом p_0=0), которые позволяют найти зависимость $\Delta p(r, w_\infty)$. Помимо этого к расчету привлекалась полученная в [2] при прососе воздуха через образец зависимость скорости фильтрации от перепада давления $w(\Delta p)$. Эти данные позволили найти поле локальных скоростей фильтрации $w(r)$, а среднюю скорость фильтрации определить как среднеинтегральную:

$$\overline{w} = \frac{1}{\pi R^2}\int\limits_0^R w(r)2\pi r dr, \qquad (1)$$

где R – радиус образца.

Заметим, что упрощенный метод расчета воздухопроницаемости, основанный на использовании уравнения (1), можно применять для окрестности критической точки и при нелинейном характере зависимости $w(\Delta p)$. Однако вдали от критической точки, где поперечная и продольная составляющие градиента давления становятся соизмеримыми, использовать уравнение (1) оснований нет.

Рассмотрим второй (строгий) метод расчета, учитывающий обе составляющие скорости фильтрации. Благодаря линейному характеру зависимости $w(\Delta p)$ составляющие скорости фильтрации можно представить на основе закона Дарси:

$$w_r = -\frac{k_r}{\mu}\frac{\partial p}{\partial r}, \qquad w_z = -\frac{k_z}{\mu}\frac{\partial p}{\partial z}, \qquad (2)$$

где индексы r и z относятся соответственно к радиальным (продольным) и поперечным составляющим скорости фильтрации и коэффициента проницаемости; μ – динамическая вязкость воздуха.

Используя уравнение неразрывности в цилиндрической системе координат

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(rw_r) + \frac{\partial}{\partial z}w_z = 0, \qquad (3)$$

с учетом (2) получим уравнение Лапласа относительно поля давлений внутри ткани, рассматриваемой в качестве анизотропной среды:

$$\frac{k_r}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial p}{\partial r}\right) + k_z\frac{\partial^2 p}{\partial z^2} = 0. \qquad (4)$$

При решении (4) использованы следующие граничные условия (ГУ):

$$p\big|_{z=0} = p_0, \; p\big|_{z=\delta} = p_\delta(r), \; p\big|_{r=0} < \infty,$$

$$p\big|_{r=R} = p_0 + (p_\delta(R) - p_0)\frac{z}{\delta}. \qquad (5)$$

Первое из них описывает постоянное давление под тканью, второе – найденное в [3], поле давлений над тканью, третье характеризует ограниченность величины давления в центре образца (в передней критической точке) и четвертое – линейность поля давления на окружности, по которой крепился образец в экспериментах.

Поставленную задачу удобнее решать относительно безразмерного перепада давлений:

$$\Pi = \frac{p - p_0}{p_m - p_0},$$

где p_m – максимальное давление в системе в передней критической точке при набегании потока на непроницаемый образец.

В связи с введенным определением уравнение (4) и ГУ (5) преобразуются к виду

$$\frac{\partial^2 \Pi}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial \Pi}{\partial r} + \gamma^2\frac{\partial^2 \Pi}{\partial z^2} = 0, \qquad (6)$$

$$\Pi\big|_{z=0} = 0, \; \Pi\big|_{z=\delta} = \Pi_\delta(r),$$

$$\Pi\big|_{r=0} < \infty, \; \Pi\big|_{r=R} = \Pi_\delta(R)\frac{z}{\delta}, \qquad (7)$$

где величина $\gamma^2 = k_z/k_r$.

Задача (6), (7) решается методом разделения переменных, для чего искомую функцию представляют в виде произведения функций от каждой из переменных:

$$\Pi(r,z) = X(r)Z(z), \qquad (8)$$

в результате чего (6) распадается на два независимых уравнения

$$\frac{\partial^2 X}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial X}{\partial r} + \vartheta^2 X = 0,$$

$$\frac{\partial^2 Z}{\partial z^2} - \vartheta^2 \gamma^2 Z = 0, \qquad (9)$$

где через ϑ обозначены собственные числа задачи.

При $\vartheta = 0$ решение первого из уравнений (9) имеет вид

$$X_0 = c_1 \ln r + c_2 \qquad (10)$$

и в силу ограниченности в нуле (третье из ГУ (7)) константа c_1=0. При $\vartheta \neq 0$ *ограниченным в нуле решением этого уравнения являются функции Бесселя первого рода нулевого порядка [4]:*

$$X_n = b_n J_0\left(\vartheta_n \frac{r}{R}\right), \qquad (11)$$

где b_n – константы, а ϑ_n – собственные числа задачи, являющиеся корнями уравнения $J_0(\vartheta) = 0$, значения которых приведены в [5].

Решение второго из уравнений (9) при $\vartheta = 0$ линейно по z и фактически совпадает с последним из ГУ (7):

$$Z_0 = \Pi_\delta(R)\frac{z}{\delta}, \qquad (12)$$

а при $\vartheta \neq 0$ с учетом первого из граничных условий (7) оно имеет вид

$$Z_n = d_n \, \mathrm{sh}\left(\vartheta_n \gamma \frac{z}{R}\right). \qquad (13)$$

В соответствии с (8) и найденными в (10...13) функциями X, Z общее решение уравнения (6) можно представить в виде бесконечного ряда:

$$\Pi = \Pi_\delta(R) +$$

$$+ \sum_{n=1}^{\infty} a_n \, \mathrm{sh}\left(\vartheta_n \gamma \frac{z}{R}\right) J_0\left(\vartheta_n \frac{r}{R}\right). \qquad (14)$$

Получение частного решения задачи, связанное с необходимостью определения коэффициентов ряда (14), требует привлечения второго из ГУ (7). При z=δ функция *П в уравнении (14) определяет поле давлений на поверхности ткани со стороны набегающего потока воздуха и должна совпадать* с функцией $\Pi_\delta(r)$ из (7). Как отмечалось выше, эта последняя функция получена ранее в [3].

Таким образом,

$$\Pi_\delta(r) = \Pi_\delta(R) +$$

$$+ \sum_{n=1}^{\infty} a_n \, sh\left(\vartheta_n \gamma \frac{\delta}{R}\right) J_0\left(\vartheta_n \frac{r}{R}\right).$$

Эта формула представляет собой разложение известной функции в бесконечный ряд по системе нормированных на отрезке $0 \le r \le R$ с весом r/R функций Бесселя. Процедура определения коэффициентов a_n такого разложения известна [6]. Домножая обе части этой формулы на $rJ_0(\vartheta_m r/R)/R$ и интегрируя в пределах от 0 до R, найдем значения коэффициентов a_n в виде

$$a_n = \frac{2\int_0^R (\Pi_\delta(r) - \Pi_\delta(R)) \frac{r}{R} J_0\left(\vartheta_n \frac{r}{R}\right) dr}{R \, \mathrm{sh}\left(\vartheta_n \gamma \frac{\delta}{R}\right) J_1^2(\vartheta_n)}, \qquad (15)$$

где $J_1(\vartheta)$ – функция Бесселя первого рода первого порядка.

При расчете значений a_n применительно к режиму обдува, когда избыточное давление под образцом $p_0 \neq 0$, интегрирование в (15) производилось численно методом Симпсона. В режиме обдува с прососом при $p_0 = 0$ согласно результатам, полученным в [3], разность безразмерных давлений в (15) можно представить уравнением параболы в форме

$$\Pi_\delta(r) - \Pi_\delta(R) = 1 - c\frac{r^2}{R^2},$$

где c – константа.

В этом случае интегрирование можно выполнить аналитически (интегральные формулы для функций Бесселя, например, в [7]) с привлечением интегрирования по частям, что дает

$$a_n = \frac{2[J_1(\vartheta_n) - c(J_1(\vartheta_n) - 2J_2(\vartheta_n))]}{\mathrm{sh}\left(\vartheta_n \gamma \frac{\delta}{R}\right) J_1(\vartheta_n)}, \quad (16)$$

где $J_2(\vartheta)$ – функция Бесселя первого рода второго порядка.

Таким образом, (14) совместно с определениями (15) и (16) коэффициентов ряда позволяет найти поле давлений внутри образца как функцию радиальной и аксиальной координат. Теперь по второй из формул (2) с учетом приведенного выше определения П нетрудно найти поле аксиальной составляющей скорости в образце $w_z(r,z)$. Вычисление этой функции при z=0, то есть на нижней поверхности образца, дает значения локальной скорости фильтрации как функции радиуса:

$$w_z(r) = -\frac{k_z}{\mu}\left[(p_\delta(R) - p_0)\frac{1}{\delta} + (p_m - p_0)\frac{\gamma}{R}\sum_{n=1}^{\infty} a_n \vartheta_n J_0\left(\vartheta_n \frac{r}{R}\right)\right].$$

Знак минус в этой формуле связан с тем, что ось z направлена навстречу потоку воздуха.

Воспользовавшись определением (1), найдем среднюю величину скорости фильтрации:

$$\overline{w} = \frac{k_z}{\mu}\left[\frac{p_\delta(R) - p_0}{\delta} + 2(p_m - p_0)\frac{\gamma}{R}\sum_{n=1}^{\infty} a_n J_1(\vartheta_n)\right]. \quad (17)$$

Как и следовало ожидать, в соответствии с предпосылками, на которых базируется метод, скорость фильтрации линейно зависит от перепада давления. Для экспериментальной проверки результатов теоретического анализа использовали опытные данные из [3].

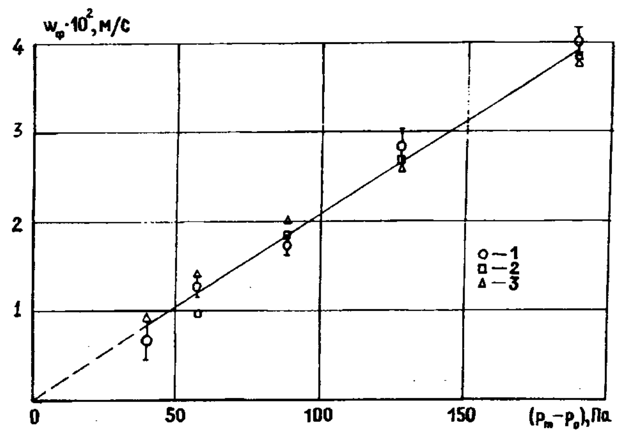

Рис. 1

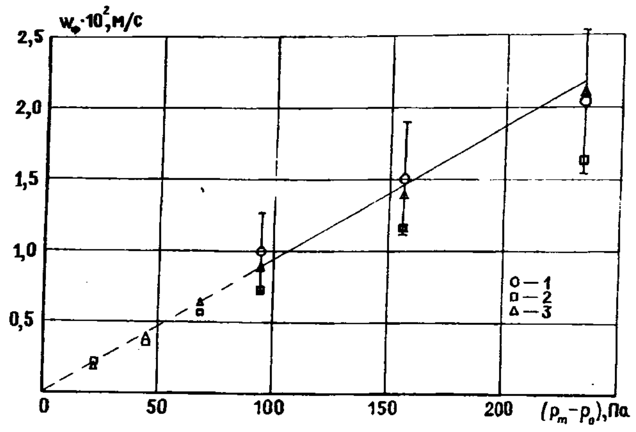

Рис. 2

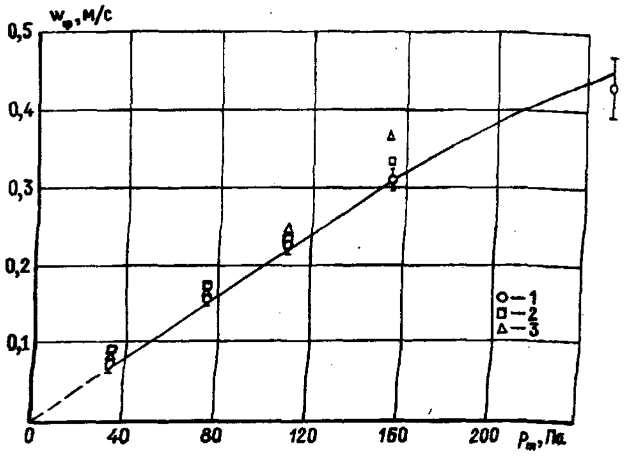

Рис. 3

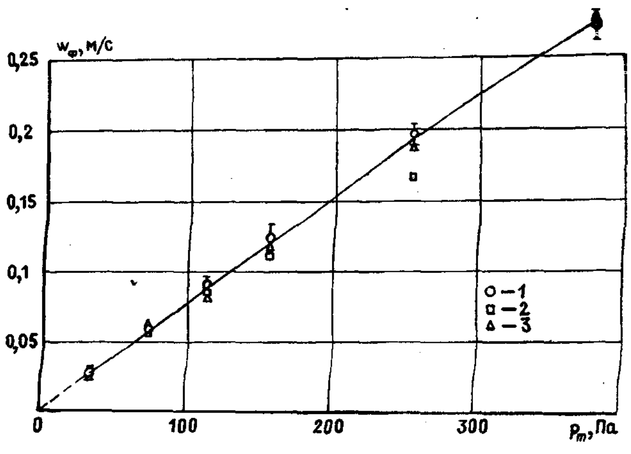

Рис. 4

Сопоставление предложенных методов расчета с экспериментом проведено на графиках, представленных на рис.1...4, для двух тканей арт. 206 (рис. 1 и 3) и арт. 3303 (рис. 2 и 4) в двух описанных выше режимах обдува (рис. 1 и 2) и обдува с прососом (рис. 3 и 4). На этих графиках точки 1 – экспериментальные; 2 – точки, найденные по первому, приближенному методу, не учитывающему продольной фильтрации; 3 – точки, рассчитанные по второму методу, основанному на линейной теории фильтрации. Вертикальными отрезками представлена статистическая погрешность экспериментальных данных, определенная с 95%-ной доверительной вероятностью.

В режимах обдува для обеих тканей – менее плотной арт. 206 и более плотной арт. 3303 – в пределах погрешности эксперимента наблюдается линейная зависимость скорости фильтрации от перепада давления. В режиме обдува с прососом, при избыточном давлении под тканью $p_0=0$, линейный характер теоретической зависимости (17) согласуется с экспериментом при избыточных давлениях (скоростных напорах) в передней критической точке, равных примерно 180 Па для менее плотной и 350 Па для более плотной ткани. Эти значения скоростного напора соответствуют скоростям набегающего потока около 16 и 23 м/с. Как указывалось в [3], в пакетах тканей скоростной напор будет перераспределяться между отдельными слоями, так что на каждом слое будет "срабатываться" меньший скоростной напор. Таким образом, при рассмотрении фильтрации воздуха в пакетах линейный подход можно распространить и на область больших скоростей набегающего потока.

Для ткани арт. 3303 в обоих режимах приближенный метод расчета дает несколько заниженные, хотя в режиме обдува и лежащие в пределах погрешности, значения скорости фильтрации, что, по-видимому, связано с пренебрежением продольной фильтрацией. Это позволяет использовать приближенный метод лишь для относительно мало плотных тканей в окрестности передней критической точки. В то же время подход, основанный на линейной теории фильтрации, может использоваться для описания фильтрации воздуха через отдельные ткани и ткани, входящие в состав пакета в широком диапазоне скоростей набегающего потока воздуха.

ВЫВОДЫ

Получена согласующаяся с экспериментом по воздухопроницаемости тканей в условиях обдува (ветра) теоретическая модель, основанная на линейной теории фильтрации и учитывающая как поперечную, так и продольную составляющие скорости фильтрации. Показана возможность использования этого подхода для описания фильтрации воздуха через отдельные ткани и ткани в пакетах в широком диапазоне скоростей набегающего потока воздуха.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Корнюхин И.П.* // Вестник МГТА. – М.: МГТА, 1995.

2. *Корнюхин И.П., Пятенков И.В.* // Изв. вузов. Технология текстильной промышленности.– 1998, №5. С.106...109.

3. *Корнюхин И.П., Пятенков И.В., Марюшин Л.А.* // Изв. вузов. Технология текстильной промышленности.– 1999, №6. С.122...125.

4. *Камке Э.* Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям. – М.: Наука, 1971.

5. Справочник по специальным функциям / Под ред. М. Абрамовица, И. Стиган. – М.: Наука, 1979.

6. *Тихонов А.Н., Самарский А.А.* Уравнения математической физики. – М.: Наука, 1972.

7. *Бейтмен Г., Эрдейи А.* Высшие трасцендентные функции. Т.2. – М.: Наука, 1974.

Рекомендована кафедрой промышленной теплоэнергетики. Поступила 01.02.01.