УДК 677.022.95

О СКОЛЬЖЕНИИ ПРОДУКТОВ ПРЯДЕНИЯ НА КОНИЧЕСКОЙ ПОВЕРХНОСТИ ПО СПИРАЛИ*

Е.Н. НИКИФОРОВА, В.Г. ЛАПШИН, Н.Г. ЖАРОВА

(Ивановская государственная текстильная академия, ОАО «Красная Талка»)

В технологических процессах текстильный материал (лента, ровница, пряжа) довольно часто огибает рабочие органы машин, имеющие форму поверхностей вращения, по винтовым линиям, например, с целью создания дополнительного натяжения продукта перед наматыванием, необходимого для повышения плотности паковки. Такие случаи имеют место и при взаимодействии волокнистых полуфабри-

---

* Работа выполнена под руководством проф., докт. техн. наук Г.И. Чистобородова

катов с вьюрками различных конструкций, создающими пространственный изгиб продукта и соответственно ложную крутку [1, 2].

Настоящая статья посвящена рассмотрению вопросов определения основных геометрических параметров текстильного материала, огибающего коническую поверхность по винтовой линии с постоянным углом подъема (локсодроме).

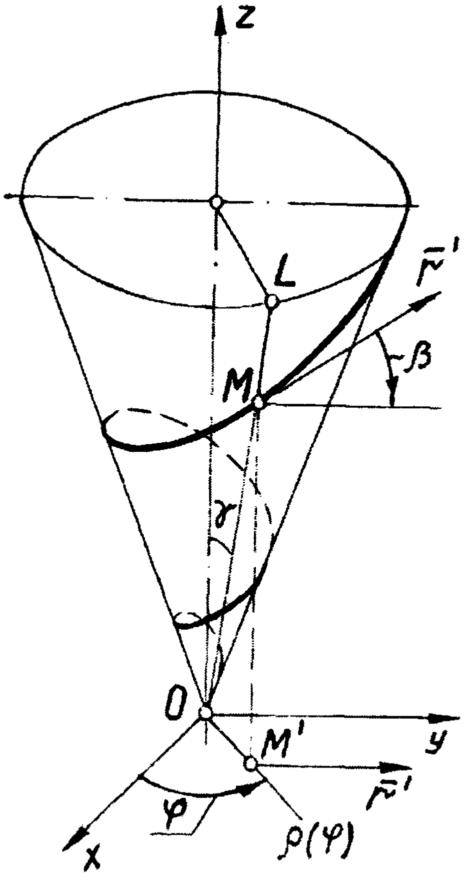

Рис. 1

Параметрические уравнения конической спирали (рис.1):

$$\begin{cases} x = ae^{k\varphi}\cos\varphi, \\ y = ae^{k\varphi}\sin\varphi, \\ z = be^{k\varphi}, \end{cases} \qquad (1)$$

где φ – параметр, от которого зависит положение точки M конической спирали (угол xOM′, где M′ – проекция точки M на плоскость xOy).

Угол γ между образующей конуса и его осью симметрии (угол конусности) связан с параметрами a и b формулой

$$\frac{z}{x} = \frac{b}{a} = \operatorname{ctg}\gamma\ . \qquad (2)$$

Коэффициент k в (1) выразим через параметры γ и β [3]:

$$k = \frac{\sin\gamma\sin\beta}{\sqrt{\cos^2\beta - \sin^2\gamma}}\ , \qquad (3)$$

где β = const – угол между касательной к спирали и плоскостью xOy (угол подъема).

Исследование поверхностей сводится к изучению принадлежащих им линий, в частности, координатных, касательных к ним, нормалей, длины дуг, кривизны и других.

Для винтовых линий контакта конической поверхности с продуктом определим уравнения касательной, главной нормали и бинормали конической спирали (1), а также нормальной, соприкасающейся и спрямляющей плоскостей.

Ввиду громоздкости промежуточных вычислений полученные уравнения (4...9) представлены в окончательном виде.

Параметрические уравнения касательной для конической спирали:

$$\begin{cases} X = a\,e^{k\varphi}(\cos\varphi + (k\cos\varphi - \sin\varphi\ )\,t, \\ Y = a\,e^{k\varphi}(\sin\varphi + (k\sin\varphi + \cos\varphi)\,t, \\ Z = b\,e^{k\varphi}(1 + kt), \end{cases} \qquad (4)$$

где t – параметр (- ∞ < t > ∞); (X, Y, Z) – координаты точки касательной.

Параметрические уравнения бинормали для конической спирали:

$$\begin{cases} X = a\,e^{k\varphi}\cos\varphi + a\,b\,k\,e^{2k\varphi}(\sin\varphi - k\cos\varphi)\,t, \\ Y = a\,e^{k\varphi}\sin\varphi - a\,b\,k\,e^{2k\varphi}(\cos\varphi + k\sin\varphi)\,t, \\ Z = b\,e^{k\varphi} + a^2(k^2+1)\,e^{2k\varphi}. \end{cases} \qquad (5)$$

Уравнения главной нормали к конической спирали:

$$\begin{cases} X = a\,e^{k\varphi}\cos\varphi + a\,e^{3k\varphi}(k\sin\varphi+\cos\varphi)\,(a^2k^2+b^2k^2+a^2)\,t, \\ Y = a\,e^{k\varphi}\sin\varphi + a\,e^{3k\varphi}(\sin\varphi-k\cos\varphi)\,(a^2k^2+b^2k^2+a^2)\,t, \\ Z = b\,e^{k\varphi}. \end{cases} \tag{6}$$

В (6) составляющая $z_{\bar{n}} = 0$ следовательно, вектор главной нормали $\bar{n}$ компланарен плоскости xOy.

Уравнение нормальной плоскости, перпендикулярной вектору касательной:

$$a\,(k\cos\varphi-\sin\varphi)\,(X-a\,e^{k\varphi}\cos\varphi + {}$$
$$+\; a\,(k\sin\varphi+\cos\varphi)\,(Y-a\,e^{k\varphi}\sin\varphi)+bk\,(Z-b\,e^{k\varphi})=0. \tag{7}$$

Уравнение соприкасающейся плоскости, перпендикулярной вектору бинормали:

$$b\,k\,(\sin\varphi-k\cos\varphi)\,(X-a\,e^{k\varphi}\cos\varphi)-b\,k\,(\cos\varphi+k\sin\varphi)\,(Y-a\,e^{k\varphi}\sin\varphi)+$$
$$+a\,(k^2+1)\,(Z-b\,e^{k\varphi})=0. \tag{8}$$

Уравнение спрямляющей плоскости, перпендикулярной вектору главной нормали:

$$(k\sin\varphi+\cos\varphi)\,(X-a\,e^{k\varphi}\cos\varphi)+(\sin\varphi-k\cos\varphi)\,(Y-a\,e^{k\varphi}\sin\varphi)=0. \tag{9}$$

Форма нити в каждый момент определяется через кривизну, которую вычислим по формуле из [4]:

$$K = \frac{|[\bar{r}', \bar{r}'']|}{|\bar{r}'|^3}. \tag{10}$$

Определив необходимые значения для (10) и выполнив преобразования, получим кривизну конической спирали в произвольной точке:

$$K = \frac{a\,e^{-k\varphi}\sqrt{(k^2+1)}}{(a^2+b^2)\,k^2+a^2}. \tag{11}$$

Орт вектора кривизны найдем с помощью выражения

$$\bar{n}_0 = \frac{[[\bar{r}', \bar{r}''], \bar{r}']}{|[[\bar{r}', \bar{r}''], \bar{r}']|}; \tag{12}$$

$$\vec{n}_0 = -\frac{1}{\sqrt{k^2+1}}\,(k\sin\varphi+\cos\varphi;\ \sin\varphi-k\cos\varphi;\ 0). \tag{13}$$

Использовав (11) и (13), определим вектор кривизны конической спирали:

$$K\,\vec{n}_0 = -\frac{a\,e^{-k\varphi}}{(a^2+b^2)\,k^2+a^2}\,(k\sin\varphi+\cos\varphi;\ \sin\varphi-k\cos\varphi;\ 0). \tag{14}$$

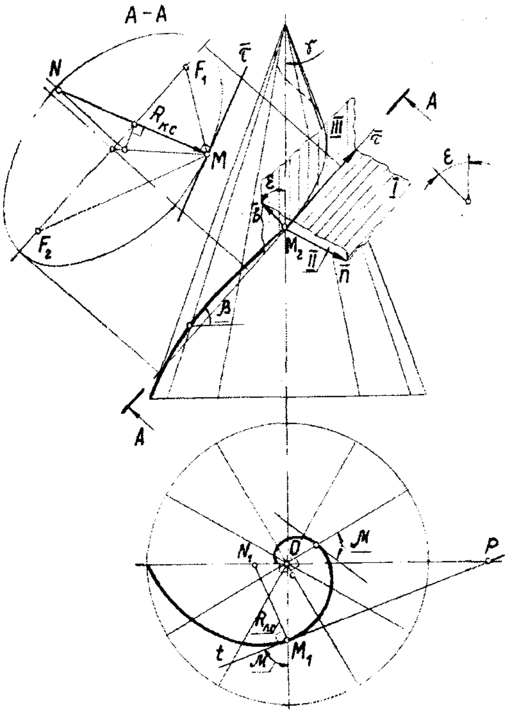

Рис. 2

Для решения практических задач большое значение имеет определение радиуса кривизны нити пространственной формы через ее проекцию на плоскость. Используя графические методы теории начертательной геометрии, установим связь между радиусом $R_{к.с}$ кривизны конической спирали в заданной точке М и радиусом $R_{л.с}$ кривизны ортогональной проекции этой кривой на плоскость (рис.2). Ортогональной проекцией конической спирали на горизонтальную плоскость является логарифмическая спираль.

В этом общем случае радиус R кривизны пространственной кривой и радиус r кривизны ее проекции на горизонтальную плоскость связаны соотношением [5]:

$$R = r\frac{\cos\varepsilon}{\cos^3\alpha}, \qquad (15)$$

где ε – угол между соприкасающейся плоскостью и плоскостью проекций; α – угол между касательной к пространственной кривой и горизонтальной плоскостью (угол подъема).

Используя полученные выше уравнения основного триэдра, для точки М конической спирали (рис.2), которая проецируется на фронтальную плоскость без искажений, построены касательная τ, главная нормаль n и бинормаль b, а также соприкасающаяся I, нормальная II и спрямляющая III плоскости. В связи с тем, что главная нормаль в любой точке конической спирали параллельна горизонтальной плоскости, угол между соприкасающейся плоскостью и плоскостью проекций (угол между их бинормалями) равен углу подъема спирали, то есть для локсодромы на поверхности конуса справедливо равенство $\beta = \varepsilon$.

Учитывая, что буквами α в (15) и β обозначена одна и та же величина, получим выражение радиуса кривизны конической спирали через ее проекцию:

$$R_{к.с} = \frac{R_{л.с}}{\cos^2\beta}. \qquad (16)$$

Формула (16) путем несложных математических вычислений позволяет определить радиус кривизны нити, скользящей на поверхности конуса по линии с постоянным углом подъема, по ее проекции на горизонтальную плоскость.

Натуральную величину радиуса кривизны логарифмической спирали можно легко найти, используя известный графический способ (рис.2). Так, построенный графически радиус кривизны конической спирали в точке М (рис.2, сечение конуса А–А) точно соответствует величине, полученной при расчете по формуле (16).

Для проектирования и расчета технологических систем с нитями, скользящими по направляющим поверхностям, удобно иметь уравнения кривых в натуральной форме, где за натуральный параметр принята длина дуги нити.

Приведем уравнение конической спирали (1) к такому виду, когда вместо углового параметра φ будет натуральный параметр s. Для этого выразим длину s дуги линии (1) в соответствии с изменением параметра φ на отрезке [0, φ]:

$$s = \frac{\sqrt{a^2 + a^2k^2 + b^2k^2}}{k}(e^{k\varphi} - 1). \qquad (17)$$

Из (17) найдем зависимость φ как функции s:

$$\varphi = \frac{1}{k}\ln\left(1+\frac{ks}{\sqrt{a^2+a^2k^2+b^2k^2}}\right). \quad (18)$$

Подставив (18) в (1), получим уравнения конической спирали, выраженные через натуральный параметр:

$$\begin{cases} x = a\left(1+\dfrac{ks}{\sqrt{a^2+a^2k^2+b^2k^2}}\right)\cos\left[\dfrac{1}{k}\ln\left(1+\dfrac{ks}{\sqrt{a^2+a^2k^2+b^2k^2}}\right)\right], \\ y = a\left(1+\dfrac{ks}{\sqrt{a^2+a^2k^2+b^2k^2}}\right)\sin\left[\dfrac{1}{k}\ln\left(1+\dfrac{ks}{\sqrt{a^2+a^2k^2+b^2k^2}}\right)\right], \\ z = b\left(1+\dfrac{ks}{\sqrt{a^2+a^2k^2+b^2k^2}}\right). \end{cases} \quad (19)$$

В случае натуральной параметризации формула (11) для определения кривизны имеет вид:

$$K(s) = \frac{a\sqrt{k^2+1}\,\sqrt{a^2+a^2k^2+b^2k^2}}{ks+(a^2+a^2k^2+b^2k^2)^{3/2}}. \quad (20)$$

Соответственно радиус кривизны конической спирали:

$$R(s) = \frac{1}{K(s)} = \frac{ks+(a^2+a^2k^2+b^2k^2)^{3/2}}{a\sqrt{k^2+1}\,\sqrt{a^2+a^2k^2+b^2k^2}}. \quad (21)$$

Отметим, что согласно (21) радиус кривизны конической спирали линейно зависит от натурального параметра s.

Исследуем изменение натяжения нити при огибании направляющего устройства по конической спирали. Для определения натяжения T небольших участков нити, то есть когда отклонение нити от геодезической линии невелико, воспользуемся формулой (4) из [6]:

$$T = T_0 \exp\left(f\int_{s_1}^{s_2} K(s)\,ds\right), \quad (22)$$

где T_0 – начальное натяжение нити; f – коэффициент трения; ds – элемент длины нити; K(s) – кривизна нити, выраженная через натуральный параметр (длину s дуги); s_1, s_2 – дуговые координаты элемента нити.

Подставив (20) в (22), получим:

$$T = T_0 \exp\left(f\int_{s_1}^{s_2}\frac{a\sqrt{k^2+1}\,\sqrt{a^2+a^2k^2+b^2k^2}}{ks+(a^2+a^2k^2+b^2k^2)^{3/2}}\,ds\right).$$

Для вычисления интеграла введем обозначения:

$$A = a\sqrt{k^2+1}\,\sqrt{a^2+a^2k^2+b^2k^2}; \quad (23)$$

$$B = (a^2+a^2k^2+b^2k^2)^{3/2}. \quad (24)$$

Тогда

$$T = T_0 \exp\left(f\,A \int_{s_1}^{s_2} \frac{ds}{ks + B} \right) = T_0 \exp\left(\frac{f\,A}{k} \ln\left|k\,s + B\right| I_{s_1}^{s_2} \right),$$

$$T = T_0 \exp\left(\frac{f\,A}{k} \ln\left|\frac{k\,s_2 + B}{k\,s_1 + B}\right| \right). \qquad (25)$$

ВЫВОДЫ

1. Найдены уравнения для длинномерного текстильного материала, скользящего на поверхности конуса по спирали, задающие положение каждой точки нити и определяющие ее форму.

2. Предложен графоаналитический метод определения радиуса кривизны конической спирали через ее проекцию на горизонтальную плоскость.

3. Получена формула, позволяющая с достаточной для практических расчетов точностью определять величину натяжения нити при огибании направляющего устройства по конической спирали в зависимости от геометрических параметров направителя и от длины нити на его поверхности.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Павлов Ю.В.* Неподвижные вьюрки в прядении. – М.: Легкая индустрия, 1978.

2. *Чистобородов Г.И. и др.* // Изв. вузов. Технология текстильной промышленности. – 1998, № 6. С.31...34.

3. *Чистобородов Г.И. и др.* Определение основных геометрических параметров текстильного материла, движущегося по конической спирали / Иванов. гос. текст. академия. – Иваново, 2002. – Деп. в ООО «Легпроминформ» 25.04.02, № 4053 - ЛП.

4. *Позняк Э.Г., Шикин Е.В.* Дифференциальная геометрия: Первое знакомство. – М.: МГУ, 1990.

5. *Бубенников А.В., Громов М.Я.* Начертательная геометрия. – М.: Высшая школа, 1965.

6. *Чистобородов Г.И. и др.* // Изв. вузов. Технология текстильной промышленности. – 2001, № 4. С.56...59.

Рекомендована кафедрой начертательной геометрии и черчения. Поступила 10.06.02.