УДК 677.017.4.072.6.074

КРУТЯЩИЙ МОМЕНТ ИДЕАЛЬНОЙ ПРЯЖИ

Ю.К. БАРХОТКИН

(Ивановская государственная текстильная академия)

Известно, что кручение комплексных нитей вызывает в составляющих их волокнах соответствующие деформации, которые по своему характеру могут быть как пластическими, так и упругими. Часть энергии, затраченная при кручении нити на образование пластических деформаций, вызвав соответствующие изменения в структуре скручиваемого материала, не оставляет после себя реактивных сил, стремящихся вернуть материал в первоначальное состояние. Энергия, затраченная на образование в нити упругих деформаций, вызывает появление в ней сил реакции.

Для определения этих сил рассмотрим идеальную пряжу, состоящую из бесконечно длинных волокон равного поперечного сечения, идеально гладких, ровных и подчиняющихся закону Гука. Такую пряжу можно получить, если пучок параллелизованных волокон, зажатых по концам, подвергнуть скручиванию путем относительного поворота зажимов на некоторый угол α, причем волокна после кручения расположатся по винтовым линиям.

Обозначим угол подъема винтовой линии наружного волокна через φ_0, промежуточного через φ, радиус нити через R, а расстояние от промежуточного волокна до оси вращения через ρ и определим закон изменения: $\varphi = f(\rho)$. Угол поворота поперечных сечений волокон является общим для всех волокон, поэтому

$$\operatorname{tg}\varphi = \operatorname{tg}\varphi_o \frac{R}{\varrho}. \tag{1}$$

Если расстояние L_o между зажимами равно единице, то длина промежуточного волокна после кручения будет

$$\ell = \frac{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2\varphi}}{\operatorname{tg}\varphi} = \frac{\sqrt{\varrho^2 + \operatorname{tg}^2\varphi_o R^2}}{\operatorname{tg}\varphi_o R}. \tag{2}$$

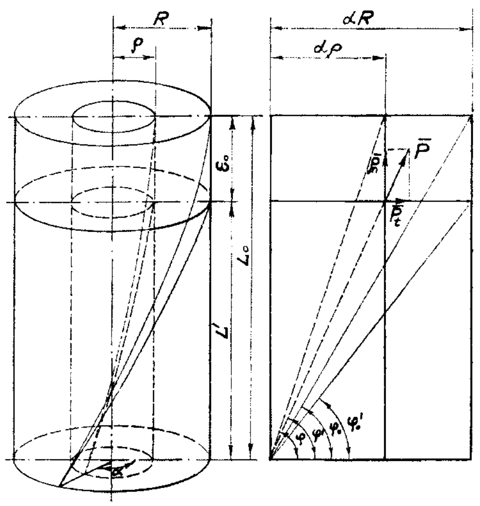

Рис. 1

Известно, что при кручении пряжи ее первоначальная длина уменьшается на величину укрутки. Переместим один из зажимов в сторону уменьшения длины пучка волокон на некоторую величину ε_o. Вследствие этого угол наклона наружного волокна стал φ'_o, а промежуточного φ' (рис.1).

Тогда зависимость угла наклона промежуточного волокна после перемещения зажима определится уравнением

$$\operatorname{tg}\varphi' = (1-\varepsilon_o)\operatorname{tg}\varphi_o \frac{R}{\varrho}. \tag{3}$$

Длина промежуточного волокна

$$\ell_1 = (1-\varepsilon_o)\frac{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2\varphi'_o}}{\operatorname{tg}\varphi'}. \tag{4}$$

Заменив $\operatorname{tg}\varphi'$ его значением из (3), получим относительное удлинение промежуточного волокна:

$$\varepsilon = \frac{\sqrt{\varrho^2 + (1-\varepsilon_o)^2\operatorname{tg}^2\varphi_o R^2}}{\operatorname{tg}\varphi_o R} - 1. \tag{5}$$

Соответственно этому растягивающее усилие промежуточного волокна для линейно-упругой нити и волокна:

$$P = EF\left[\frac{\sqrt{\varrho^2 + (1-\varepsilon_o)^2\operatorname{tg}^2\varphi_o R^2}}{\operatorname{tg}\varphi_o R} - 1\right], \tag{6}$$

где E – модуль упругости волокна, кГ/мм; F – площадь сечения волокна, мм.

Поскольку это усилие наклонено к поперечному сечению нити под углом φ', то нормальная составляющая определится выражением

$$P_n = (1-\varepsilon_o)EF\left[1 - \frac{\operatorname{tg}\varphi_o R}{\sqrt{\varrho^2 + (1-\varepsilon_o)^2\operatorname{tg}^2\varphi_o R^2}}\right]. \tag{7}$$

Если волокна, составляющие нить, расположены в n слоях по z волокон в каждом слое, то сумма всех нормальных усилий определит силу, растягивающую нить при кручении.

Осевое усилие нити:

$$Q = (1-\varepsilon_o)EF\sum_{k=0}^{n} Z_k\left[1 - \frac{\operatorname{tg}\varphi_o R}{\sqrt{\varrho_k^2 + (1-\varepsilon_o)^2\operatorname{tg}^2\varphi_o R^2}}\right]. \tag{8}$$

Для нити, скрученной из бесконечно тонких волокон, осевое растягивающее усилие:

$$Q = 2\pi(1-\varepsilon_o)E\int_0^R \left[1-\frac{tg\varphi_o R}{\sqrt{\varrho^2+(1-\varepsilon_o)^2 tg^2\varphi_o R^2}}\right]\varrho d\varrho . \quad (9)$$

При этом в качестве элементарной площади поперечного сечения нити возьмем условную площадь сечения нити, полностью заполненную веществом, из которого состоит нить [1,с.18].

Тогда

$$dF = 2\pi\varrho d\varrho . \quad (10)$$

После интегрирования (9) получим

$$Q = \pi R^2(1-\varepsilon_o)E\left\{1-2tg\varphi_o\left[\sqrt{1+(1-\varepsilon_o)^2 tg^2\varphi_o}-(1-\varepsilon_o)tg\varphi_o\right]\right\} . \quad (11)$$

Известно, что если нить после кручения отпустить из зажимов, то ее длина уменьшится на величину укрутки, равную ε_y. Таким образом, если в уравнении (11) принять величину укорочения пряжи, равной величине естественной укрутки, то есть $\varepsilon_o = \varepsilon_y$, то растягивающая осевая сила станет равной нулю.

Спроектировав растягивающее усилие промежуточного волокна (выражение (6)) на плоскость поперечного сечения нити, будем иметь величину тангенциальных усилий (рис.1):

$$P_t = EF\varrho\left[\frac{1}{tg\varphi_o R}-\frac{1}{\sqrt{\varrho^2+(1-\varepsilon_o)^2 tg^2\varphi_o R^2}}\right] . \quad (12)$$

Крутящий момент, необходимый для скручивания нити, состоящей из конечного числа волокон, в этом случае будет равен

$$M = EF\sum_{\kappa=0}^{n} Z_\kappa \rho_\kappa^2\left[\frac{1}{tg\varphi_o R}-\frac{1}{\sqrt{\rho_\kappa^2+(1-\varepsilon_o)^2 tg^2\varphi_o P^2}}\right] . \quad (13)$$

Соответственно для бесконечно тонких волокон

$$M = 2\pi E\int_0^R \left[\frac{1}{tg\varphi_o R}-\frac{1}{\sqrt{\varrho^2+(1-\varepsilon_o)^2 tg^2\varphi_o R^2}}\right]\varrho^3 d\varrho . \quad (14)$$

После интегрирования

$$M = 2\pi R^3 E\left\{\frac{1}{4tg\varphi_o}-\frac{1}{3}\left[\left[1-2(1-\varepsilon_o)^2 tg^2\varphi_o\right]\sqrt{1+(1-\varepsilon_o)^2 tg^2\varphi_o}+2(1-\varepsilon_o)^3 tg^3\varphi_o\right]\right\} . \quad (15)$$

Заметим, что в формуле (15) величина E представляет модуль упругости пряжи. Однако в сечении реальной пряжи имеются пустоты, поэтому модуль упругости пряжи будет зависеть от плотности волокон в сечении пряжи. Следовательно, для достоверности расчетов необходимо пользоваться модулем $E_в$ упругости волокна, а площадь сечения пряжи определять как площадь сечения $F_в$ одного волокна, умноженную на количество $n_в$ волокон в данном сечении.

В силу названных причин для определения упругого крутящего момента пряжи будем пользоваться выражением

$$M = E_в F_в n_в d\left\{\frac{(1-\varepsilon_o)}{4L} - \frac{1}{3}\left[(1-2L^2)\sqrt{1+L^2} + 2L^3\right]\right\}, \qquad (16)$$

где $L = \frac{(1-\varepsilon_o)\cdot 10^3}{\pi d K}$; d – диаметр (17)

пряжи, мм; K – крутка пряжи, кр/м.

Аналогично изменится и формула (11) осевого усилия:

$$Q = E_в F_в n_в (1-\varepsilon_o)\left\{1 - \frac{2L}{(1-\varepsilon_o)}\left(\sqrt{1+L^2} - L\right)\right\}. \qquad (18)$$

Подчеркнем, что величина L характеризует угол подъема винтовой линии наружного волокна с учетом деформации нити в осевом направлении.

Анализ формулы (16) показывает, что чем больше натяжение пряжи, тем выше упругий крутящий момент. Значит, для определения крутящего момента ненатянутой пряжи в (16) величину укорочения пряжи следует приравнять величине укрутки: $\varepsilon_o = \varepsilon_y$.

Для определения упругого крутящего момента пряжи при ее натяжении в (16) воспользуемся выражением $\varepsilon_o = \varepsilon_y - \varepsilon_к$, где $\varepsilon_к$ – деформация пряжи при заданной величине ее осевого растяжения.

Величину $\varepsilon_к$ в первом приближении определим из закона Гука при растяжении по формуле

$$\varepsilon_к = \frac{P}{E_в F_в n_в}, \qquad (19)$$

где P – усилие растяжения пряжи, кГ.

При практическом использовании формулы (16) величину ε_y можно взять из справочной таблицы, величину $\varepsilon_к$ – из диаграммы растяжения пряжи, а количество волокон в сечении пряжи определить по известной формуле

$$n_в = \frac{T}{T_в}(1-\varepsilon_y), \qquad (20)$$

где T – линейная плотность пряжи, текс; $T_в$ – линейная плотность волокна, текс.

ВЫВОДЫ

Расчеты, проведенные по формуле (16) для пряжи хлопчатобумажной № 40 (25 текс), показали, что при нулевой растягивающей осевой силе величина упругого крутящего момента составила 1,57 сН·мм, а при растягивающей в 100 сН – 3,73сН·мм.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Мигушов И.И.* Механика текстильной нити и ткани: Моногр. – М.: Легкая индустрия, 1980.

Рекомендована кафедрой прядения. Поступила 04.06.02.