УДК 677.08.021. 16/22

ПЛОСКОЕ ДЕФОРМИРОВАННОЕ СОСТОЯНИЕ ВОЛОКНИСТЫХ СМЕСЕЙ В ПРОЦЕССЕ ОЧИСТКИ

В.Д. ФРОЛОВ, А.Г. ПЕЧНИКОВА, Ю.В. ДУНАЕВА, ОЮУНЗАЯА Э.

(Ивановская государственная текстильная академия)

Технологические условия взаимодействия колосниковых устройств с элементами волокнистых пучков, протаскиваемых барабанами с пильчатой гарнитурой, являются основной характеристикой эффективной очистки шерстяных отходов.

Если в одном из направлений, например x_3, компонента перемещения $u_3 = \omega$ имеет вид

$$\omega = C_1 x_3 + C_2, \tag{1}$$

где C_1 и C_2 – некоторые постоянные, а две другие компоненты вектора перемещения зависят только от координат x_1, x_2:

$$U_I = U_I(x_1, x_2), \qquad I = 1,2\ldots, \tag{2}$$

то это говорит о том, что имеет место плоское деформационное состояние, для которого закон Гука для изотропной среды может быть записан в виде двух взаимно обратных соотношений:

$$\sigma_{IJ} = \frac{E(1-v)}{(1+v)(1-2v)}\left(\varepsilon_{IJ} + \frac{v}{1+v}\in_{IK}\in_{jL}\in_{KL}\right), \tag{3}$$

$$\in_{IJ} = \frac{1-v^2}{E}\left(\sigma_{IJ} - \frac{v}{1+v}\in_{IK}\in_{JL}\sigma_{KL}\right). \tag{4}$$

Для определения векторного произведения введены символы Леви-Чивиты $\in_{ijk}$:

$$\in_{ijk} = \begin{cases} +1, \text{ если индексы различны с четной подстановкой;} \\ -1, \text{ если индексы различны с нечетной подстановкой;} \\ 0, \text{ если хотя бы два индекса одинаковы.} \end{cases}$$

Если

$$E' \equiv \frac{E}{1-v^2}, \quad v' \equiv \frac{v}{1-v}, \tag{5}$$

то соотношения (3), (4) имеют вид

$$\sigma_{Ij} = \frac{E'}{1-v'^2}\left(\in_{IJ} + v'\in_{IK}\in_{JL}\in_{KL}\right), \tag{6}$$

$$\in_{Ij} = \frac{1}{E'}\left(\sigma_{IJ} - v'\in_{IK}\in_{JL}\sigma_{KL}\right). \tag{7}$$

Из соотношений тензора напряжения $\underline{\sigma}$:

$$\vec{S}^{(n)} = \underline{\sigma} + \vec{n}, \quad S_i^{(n)} = \sigma_{ij} n_j, \tag{8}$$

где $\vec{S}^{(n)}$ – вектор поверхностных сил, действующих перпендикулярно к площадке, характеризующейся единичным вектором нормали $\vec{n}$, а также законом неразрывности в лагранжевом способе описания:

$$\varrho dv = \text{const}. \qquad (9)$$

Вектор скорости частицы сорной примеси

$$\vec{v} = \vec{x}^{\bullet}(\vec{X}, t) = \vec{u}^{\bullet}(\vec{X}, t), \qquad (10)$$

где точка обозначает частную производную по времени.

Пользуясь соотношениями (8....10), а также законом об изменении количества движения

$$\frac{d}{dt}\int_V \varrho\vec{v}dv = \int_V \varrho\vec{F}dv + \int_\Sigma \vec{S}^{(n)}d\Sigma, \qquad (11)$$

где ϱ – плотность волокнисто-воздушной или волокнисто-водяной массы, г/см^3; $\vec{F}$ – вектор массовых сил, см/с^2, получаем уравнения движения сплошной среды:

$$\varrho\vec{u}^{\bullet\bullet} = \varrho\vec{F} + \mathrm{Div}\underline{\sigma}, \quad \varrho u_i^{\bullet\bullet} = \varrho F_i + \sigma_{ji,j}. \qquad (12)$$

Уравнения (12) превращаем в уравнения равновесия:

$$\mathrm{Div}\underline{\sigma} + \varrho\vec{F} = 0, \quad \sigma_{ij,j} + \varrho F_i = 0, \qquad (13)$$

из которых следует:

$$\sigma_{IJ,J} + \varrho F_I = 0. \qquad (14)$$

Граничные условия в напряжениях в этом случае:

$$\sigma_{IJ} n_J = S_I^0, \qquad (15)$$

где S_I^0 – усилия.

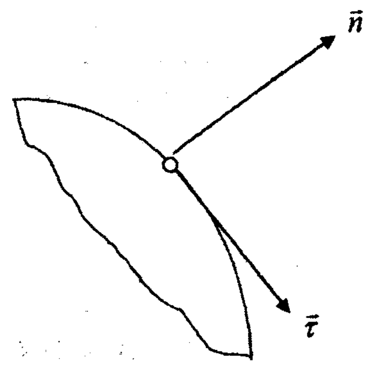

Рис. 1

Наряду с $\vec{n}$ введем единичный вектор $\vec{\tau}$, касательный к контуру, ограничивающему тело (рис. 1 – поверхность колосникового устройства). Компоненты этих векторов связаны зависимостью

$$\tau_I = -\in_{IJ} n_J, \quad n_I = \in_{IJ} \tau_J, \qquad (16)$$

откуда

$$\tau_I = \frac{dx_I}{dS}, \qquad (17)$$

где S – длина дуги контура.

Тогда уравнение совместности плоского деформационного состояния можно записать как

$$\in_{IM}\in_{NJ}\in_{IJ,MN} = 0. \qquad (18)$$

После разбивки тензора деформации на шаровую часть и девиатор с использованием формулы, выражающей компоненту девиатора тензора деформации через напряжения

$$e_{ij} = \breve{B}(\sigma, \sigma_u)s_{ij}, \qquad (19)$$

где $\breve{B}$ – скалярный тензор Грина первого рода, получим

$$\in_{IM}\in_{NJ}\left[\breve{B}(\sigma, \sigma_u)s_{IJ}\right]_{MN} = \frac{1}{3K}\Delta\sigma. \qquad (20)$$

Таким образом, задача в случае плоского деформированного состояния заключается в решении уравнений (14) и (20) при выполнении граничных условий (15), которые благодаря (17) имеют вид

$$\sigma_{IJ} \in_{JK} \tau_K = S_I^0. \qquad (21)$$

Для изотропного линейного пучка упругой волокнистой массы в воздушной или водной среде уравнение (20) с учетом (14) можно выразить так:

$$\Delta\sigma_{IJ} = -\varrho(1-v')F_{I,I}. \qquad (22)$$

В случае, если массовые силы обладают потенциалом

$$f,I \equiv -\varrho F_I, \qquad (23)$$

то

$$\Delta(\sigma_{II} - (1-v')f) = 0. \qquad (24)$$

В уравнение (24) введем функцию напряжения Эри Φ:

$$\sigma_{IJ} = \in_{IK} \in_{JL} \Phi_{.KL} + f\delta_{IJ}. \qquad (25)$$

Выражение (14) при условии (23) удовлетворяется тождественно, а основные величины, связанные с тензором напряжения, с помощью функции напряжений принимают вид

$$\sigma_{33} = \breve{Q}\sigma_{II} \equiv \breve{Q}\Delta\Phi,$$

$$\sigma = \frac{1}{3}(1+\breve{Q})\sigma_{II} \equiv \frac{1}{3}(1+\breve{Q})\Delta\Phi,$$

$$\sigma_u = \sqrt{\sigma_{IJ}\sigma_{Ij} - \frac{1}{3}(\sigma_{II} - \breve{Q}\sigma_{II})^2 + (\breve{Q}\sigma_{II})^2} \equiv \sqrt{\Phi_{,IJ}\Phi_{,IJ} - \frac{1}{3}[(1-\breve{Q})\Delta\Phi]^2 + (\breve{Q}\Delta\Phi)^2}. \qquad (26)$$

Тогда уравнение для функции напряжения Φ:

$$\left[\breve{B}(\sigma,\sigma_u)\Phi_{,ij}\right]_{,ij} = \frac{1}{3}\Delta\left\{\left[\breve{B}(\sigma,\sigma_u) + \frac{1}{3K}\right](1+\breve{Q})\Delta\Phi\right\}. \qquad (27)$$

Для изотропной упругой среды формула (26) превращается в бигармоническое относительно функции напряжения Φ

$$\Delta^2\Phi = 0. \qquad (28)$$

Подставив в граничные условия (21) выражение через функцию напряжений, получим

$$\in_{IK} \tau_L \Phi_{,KL} = S_I^0. \qquad (29)$$

Следовательно, вектор-функция

$$T_I \equiv \in_{IK} \Phi_{,K}, \qquad (30)$$

для которой

$$\frac{dT_I}{ds} \equiv S_I^0. \qquad (31)$$

Интегрируя функцию по длине дуги контура, получим T_I, частные производные $\Phi_{,K}$ и саму функцию Φ. Тогда из (30)

$$\Phi_{,K} = T_I \in_{IK}. \qquad (32)$$

Поскольку

$$T_I = \int_\Gamma S_I^0 ds, \qquad (33)$$

то

$$\Phi_{,K} = \in_{IK} \int_\Gamma S_I^0 ds. \qquad (34)$$

Вследствие этого граничные условия для функции Φ из уравнения (27):

$$\Phi = \int dx_K \left[\in_{lK} \int_{\Gamma} S_l^0 ds \right]. \qquad (35)$$

С нормальной производной от функции

$$\frac{d\Phi}{dn} \equiv \Phi,_K n_K = \in_{lK} n_K \int_{\Gamma} S_l^0 ds. \qquad (36)$$

Физический смысл функции Эри устанавливаем путем отсчета длины дуги от некоторой точки О, лежащей на контуре. Значение функции Φ в точке $M(x_K^l)$ на поверхности колосникового устройства при $S = S_l$ приведено на рис. 2.

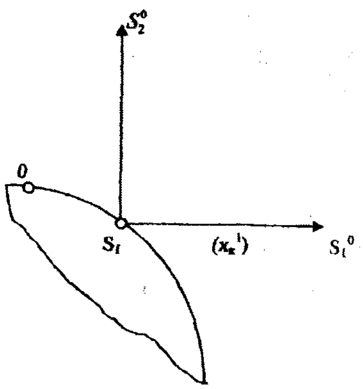

Рис. 2

После интегрирования по частям

$$\Phi = \int_0^{S_l} dx_K \left[\in_{lK} \int_0^{S} S_l^0 ds \right] = x_K \in_{lK} \int S_l^0 ds \Big|_{s=0}^{s=s_l} - \int_0^{S_l} \in_{lK} x_K S_l^0 ds = \in_{lK} \int_0^{S_l} \left(x_K^l - x_K \right). \qquad (37)$$

Таким образом, значения Φ в точке $M(x_K^l)$ отражают распределение нагрузок по контуру от $S = 0$ до $S = S_l$ в длинных цилиндрических телах под действием нагрузок ортогональных к оси цилиндра.

Для такой среды связь между напряжениями и деформациями имеет вид

$$S_{ij} = \breve{A}(\theta, \varepsilon u) e_{ij}, \qquad (38)$$

$$\sigma = K\theta, \qquad (39)$$

где К – модуль сжатия, $\breve{A}$ – скалярный оператор двух инвариантов тензора деформации.

Если соотношения (20, 39, 40) справедливы, то

$$\varepsilon_{13} = 0, \quad \varepsilon_{33} = P_{\varepsilon_{II}},$$

$$\breve{P} \equiv \left[1 - 3\breve{B}(\sigma, \sigma_u)K\right]\left[2 + 3\breve{B}(\sigma, \sigma_u)K\right]^{-1} = \left[\breve{A}(\theta, \varepsilon u) - 3K\right]\left[2\breve{A}(\theta, \varepsilon u) + 3K\right]^{-1}, \qquad (40)$$

$$\theta = \frac{\sigma}{K} = \left(1 + \breve{P}\right)\varepsilon_{II}, \qquad \varepsilon u = \sqrt{e_{IJ} e_{IJ} + e_{33}^2}. \qquad (41)$$

В этом случае, если известны компоненты двухмерных тензоров напряжений S_{IJ}, σ_{IJ} и деформаций e_{IJ}, ε_{Ij}, становятся известными и трехмерные тензоры напряжений и деформаций [1].

ЛИТЕРАТУРА

1. *Победря Б.Е.* Механика композиционных материалов. – М.: Изд-во МГУ, 1984.

Рекомендована кафедрой механической технологии текстильных материалов. Поступила 14.10.02.