УДК 677

МЕТОД РАСЧЕТА УПРУГОПЛАСТИЧЕСКОЙ ПЛАСТИНЫ С ТРЕЩИНОЙ

В. С. ЯРЫГИН

(Шуйский государственный педагогический университет)

При проектировании машин для текстильной промышленности следует учитывать возможность развития трещин и разрушение деталей в процессе длительной эксплуатации. Разрушение тонкостенных элементов текстильного оборудования может быть рассмотрено в рамках теории расчета упругопластической пластины с трещиной.

Упругопластическая пластина единичной толщины с трещиной находится под растягивающей равномерно распределенной нагрузкой, приложенной перпендикулярно к трещине. Рассмотрим местное поле перемещений в локальной полярной системе координат r, φ (рис. 1).

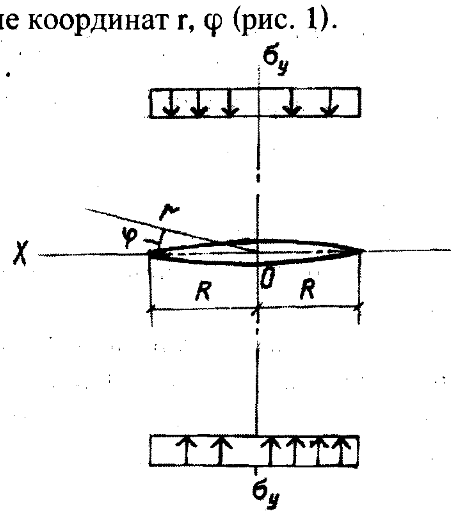

Рис. 1

Трещина с центром в начале координат и длиной 2R свободна по контуру от воздействий внешних усилий. Определим значение внешней нагрузки, при которой возможен рост трещины. Решение осуществляется в перемещениях.

Приращения перемещений, связанные с местным полем возмущения в области трещины, будем искать в виде линейных комбинаций частных решений в полярной системе координат [1]:

$$du_n = C_n r^{-n} (a_n \cos n\varphi + b_n \sin n\varphi), \quad (1)$$

где n – целое число.

Учитывая граничные условия и осевую симметрию задачи, примем для области $r \geq R$ приращения в виде

$$\begin{aligned} du_n &= C_n r^{-n} (a_n \cos n\varphi + b_n \sin n\varphi), \\ du_{\varphi n} &= 0. \end{aligned} \quad (2)$$

Здесь C_n, b_n, a_n – произвольные постоянные интегрирования.

Приращения деформаций $d\varepsilon_{rn}$, $d\varepsilon_{\varphi n}$, $d\gamma_{r\varphi n}$, связанные с местным возмущением в области $r > R$, примыкающей к трещине, запишем в виде

$$d\varepsilon_{rn} = -\frac{nC_n}{r^{n+1}}(a_n \cos n\varphi + b_n \sin n\varphi),$$
$$d\varepsilon_{\varphi n} = \frac{C_n}{r^{n+1}}(a_n \cos n\varphi + b_n \sin n\varphi), \qquad (3)$$
$$d\gamma_{r\varphi n} = -\frac{nC_n}{r^{n+1}}(a_n \sin n\varphi - b_n \cos n\varphi).$$

Поперечную деформацию пластинки найдем из условия упругого изменения объема:

$$d\varepsilon_{zn} = -\frac{\nu(1-n)C_n}{(1-\nu)r^{n+1}}(a_n \cos n\varphi + b_n \sin n\varphi)\,. \qquad (4)$$

При этом среднее приращение деформации запишется в виде

$$d\theta_n = \frac{(1-2\nu)(1-n)C_n}{3(1-\nu)r^{n+1}}(a_n \cos n\varphi + b_n \sin n\varphi), \qquad (5)$$

а компоненты девиатора приращений деформации в виде

$$de_{rn} = -\frac{(1-2\nu+2n-\nu n)C_n}{3(1-\nu)r^{n+1}}(a_n \cos n\varphi + b_n \sin n\varphi),$$
$$de_{\varphi n} = \frac{(2-\nu+n-2\nu n)C_n}{3(1-\nu)r^{n+1}}(a_n \cos n\varphi + b_b \sin n\varphi), \qquad (6)$$
$$de_{zn} = -\frac{(1+\nu)(1-n)C_n}{(1-\nu)r^{n+1}}(a_n \cos n\varphi + b_n \sin n\varphi).$$

Компоненты девиатора приращений деформации связаны с напряжениями σ_r, σ_φ посредством соотношений Л. Прандтля [2]:

$$de_r = \frac{ds_r}{2G} + \lambda s_r,$$
$$de_\varphi = \frac{ds_\varphi}{2G} + \lambda s_\varphi, \qquad (7)$$
$$de_{r\varphi} = \frac{ds_{r\varphi}}{2G} + \lambda s_{r\varphi},$$

где $s_r = \sigma_r - \sigma_0$, $s_\varphi = \sigma_\varphi - \sigma_0$; σ_0 – среднее напряжение; ν – коэффициент поперечной деформации; G – модуль сдвига; $\lambda = \dfrac{3d\varepsilon_{ip}}{2\sigma_i}$, а $d\varepsilon_{ip}$ и σ_i – интенсивность приращений пластической деформации и интенсивность напряжений соответственно.

Исходя из выше приведенных соотношений получим напряжения в точках местного поля в любой момент деформации $k = m$:

$$\sigma_{rk} = -\frac{\sqrt{2}(1-2\nu+2n-\nu n)}{3(1-\nu)\sqrt{\Psi}}\sigma_i + \frac{E}{3(1-\nu)}\sum_{k=1}^{m}\sum_{1}^{n}\frac{(1-n)C_n}{r^{n+1}}(a_n\cos n\varphi + b_n \sin n\varphi),$$

$$\sigma_{\varphi k} = \frac{\sqrt{2}(2-\nu+2n-\nu n)}{3(1-\nu)\sqrt{\Psi}}\sigma_i + \frac{E}{3(1-\nu)}\sum_{k=1}^{m}\sum_{1}^{n}\frac{(1-n)C_n}{r^{n+1}}(a_n\cos n\varphi + b_n \sin n\varphi), \quad (8)$$

$$\tau_{r\varphi} = \frac{-n\sigma_i}{\sqrt{2\Psi}}.$$

Здесь постоянная

$$\Psi = (1+n)^2 + \left(\frac{1-n\nu}{1-\nu}\right)^2 + \frac{3}{2}n^2. \quad (9)$$

Условие упрочнения Хубера-Мизеса запишется в виде [2]:

$$\sigma_i = \Phi\left(\int d\varepsilon_{ip}\right), \quad (10)$$

где Φ – функция, описывающая истинную диаграмму растяжения. Произвольные постоянные интегрирования C_n, a_n, b_n найдем, используя вариационный метод Ритца.

Частные решения получим специальным выбором постоянных $a_n = 1$, $b_n = 1$.

Потенциальную энергию приращений в области компенсации дефекта при $r \geq R$ запишем так:

$$dW' = \int(d\sigma_r d\varepsilon_r + d\sigma_\varphi d\varepsilon_\varphi + d\tau_{r\varphi} d\gamma_{r\varphi})dF. \quad (11)$$

Перемещение контура трещины (при $\varphi = 0$ и $r \leq R$, удовлетворяющих граничным условиям задачи и уравнениям равновесия) будем разыскивать в виде суммы членов ряда:

$$du_{\varphi n} = C'_n\left[(2R-r)^n - R^n\right]. \quad (12)$$

Из условия совместности деформации определим, что

$$C'_n = \frac{C_n}{R^{2n}}. \quad (13)$$

Приращение потенциальной энергии дефекта при изменении внешнего поля напряжения на величину $d\sigma_y$ в области трещины запишем следующим образом:

$$dW'' = 4d\sigma_y C_n \int_0^R\left[(2R-r)^n - R^n\right]. \quad (14)$$

Применение метода Ритца даст систему уравнений

$$\frac{\partial(dW' + dW'')}{\partial C_n} = 0 \quad (15)$$

для определения произвольных параметров C_n.

Первые два члена ряда, составляющие комбинацию частных решений, имеют следующие значения параметра C_n:

$$C_1 = 0{,}8833\frac{d\sigma_y R^2}{E}, \quad C_2 = 1{,}2686\frac{d\sigma_y R^3}{E}. \quad (16)$$

Интенсивность приращения пластической деформации

$$d\varepsilon_{ip} = \frac{\sqrt{2}}{3}\left[(d\varepsilon_{\varphi p} - d\varepsilon_{rp})^2 + (d\varepsilon_{rp} - d\varepsilon_{zp})^2 + (d\varepsilon_{zp} - d\varepsilon_{\varphi p})^2 + \frac{3}{2}d\gamma^2_{r\varphi p}\right]^{1/2} \quad (17)$$

определим, имея в виду то обстоятельство, что приращения деформаций $d\varepsilon_\varphi$, $d\varepsilon_r$, $d\varepsilon_z$, $d\gamma_{r\varphi}$ складываются из деформаций основного и местного полей:

$$
\begin{aligned}
d\varepsilon_r &= d\varepsilon_r' + d\varepsilon_r'',\\
d\varepsilon_\varphi &= d\varepsilon_\varphi' + d\varepsilon_\varphi'', \qquad (18)\\
d\varepsilon_z &= d\varepsilon_z' + d\varepsilon_z'',\\
d\gamma_{r\varphi} &= d\gamma_{r\varphi}' + d\gamma_{r\varphi}''.
\end{aligned}
$$

В итоге интенсивность приращений деформации в зоне дефекта при $r = R$, $\varphi = 0$ для двух членов ряда ($n = 1, 2$) запишем в виде

$$d\varepsilon_i = 3{,}838\frac{\sigma_y}{E}. \qquad (19)$$

ВЫВОДЫ

Анализ результатов проведенного решения показывает, что разрушение возможно, если напряжение основного поля будет определяться неравенством

$$\sigma_y \geq 0{,}26048\ \sigma_в. \qquad (20)$$

Если же $\sigma_y \leq 0{,}26048\ \sigma_т$, то рост трещины невозможен. Здесь $\sigma_т$ и $\sigma_в$ – предел прочности и текучести материала пластинки. В случае промежуточных значений внешней нагрузки рост трещины останавливается после определенного числа циклов нагружения.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Ярыгин В.С.* Исследование осесимметричной оболочки с трещиной при динамическом нагружении // Сб. научн. тр.: Надежность и прочность машиностроительных конструкций – Куйбышев, КПтИ, 1988. С.67...70.

2. *Хилл Р.* Математическая теория пластичности. – М.: ГИТЛ, 1956.

Рекомендована кафедрой общетехнических дисциплин. Поступила 18.04.02.