

УДК 677.071.252.4:620.177
DOI 10.47367/0021-3497_2021_1_163

ВЗАИМОДЕЙСТВИЕ ЛЬНЯНОЙ НИТИ С РАБОЧИМИ ОРГАНАМИ МАШИН
INTERACTION OF THE LINEN STRING WITH WORKING BODIES OF MACHINES

В.П. ЩЕРБАКОВ, Н.С. СКУЛАНОВА, Т.И. ПОЛЯКОВА, С.Л. ХАЛЕЗОВ
V.P. SCHERBAKOV, N.S. SKULANOVA, T.I. POLJAKOVA, S.L. KHALEZOV

(Российский государственный университет имени А.Н. Косыгина (Технологии. Дизайн. Искусство),
Ивановский государственный политехнический университет)

(Russian State University named after A.N. Kosygin (Technologies. Design. Art),
Ivanovo State Polytechnical University)

E-mail: victor.scherbackow2012@yandex.ru

Изложены теории взаимодействия нитей с рабочими органами машин. Дан метод и способ определения жесткости нити при изгибе. Приведены расчеты льняных нитей.

Theories of interaction of strings with working bodies of machines are stated. The method and a way of definition of rigidity of a string is given at a bend. Calculations of linen strings are given.

Ключевые слова: льняная пряжа, натяжение, изгиб, жесткость, контакт.

Keywords: a linen yarn, tension, bend, rigidity, contact.

В прошлом льняная отрасль текстильной промышленности страны развивалась если не столь успешно как, например, хлоп-

чатобумажная или шерстяная, но постепенно сокращалась технологическая отсталость в производствах отрасли. В настоя-

щее время наблюдаем полный упадок и разрушение. Сейчас фонд Сколково объявил о "технологической революции в льняной отрасли". Нашему вниманию представляют уникальный, не имеющий аналогов в мире, совместный проект "Унифицированное льноволокно (УЛВ). Технология производства", способный заменить хлопковое волокно не только на российском рынке, но и бросить вызов передовым технологическим решениям в мире. На наш взгляд, предлагаемая программа лишена практического смысла. Но как бы то ни было, речь идет о технологии льняных изделий: пряжи, ткани, трикотажа. Правильный выбор нити может и должен быть сделан для конкретных условий, при которых происходит формирование ткани или трикотажа на машине. Одному из наиболее распространенных явлений при переработке льняной пряжи – взаимодействию нити с рабочими органами машин – посвящена данная статья. В тексте нет различия между нитью и пряжей, рассматриваемых как одномерный континуум (сплошная среда, в которой исследуются процессы при различных внешних условиях).

Еще в 1775 г. Леонард Эйлер получил решение задачи о равновесии абсолютно гибкой нити на шероховатой поверхности кругового цилиндра при заданных активных силах, коэффициенте трения μ и предположении, что силы трения подчиняются закону Амонтона. Формула Эйлера записывается в виде

$$T_2 = T_1 e^{\mu\varphi}, \quad (1)$$

где T_1 – натяжение (ведомой) набегающей ветви нити; T_2 – натяжение сбегающей (ведущей) ветви нити; φ – угол охвата нитью цилиндра. При расчете гибкой нити предполагается, что из внутренних сил в ней возникает лишь осевая сила – натяжение T . Но текстильная нить и, как следствие, любой текстильный материал существует лишь потому, что в ней даже при отсутствии внешней нагрузки реально присутствуют натяжения волокон, перерезывающие силы, контактная нагрузка между волокнами, внутренние изгибающие и крутя-

щие моменты. Поэтому механика гибкой нити не описывает ни качественно, ни количественно взаимодействие нити с рабочими органами текстильных машин, когда значительное влияние на форму и натяжение нити оказывает жесткость при изгибе и кручении. Жесткость традиционных текстильных нитей довольно мала по сравнению с жесткостью конструкционных материалов, и зачастую ее можно не учитывать. В данной статье рассматриваются одна из особенностей механических свойств льняной пряжи – большая жесткость при растяжении и изгибе. Если модуль упругости при растяжении E кардной хлопчатобумажной пряжи составляет 1350 МПа, шерстяной гребенной – 1700 МПа, вискозной упрочненной нити – 4600 МПа, то для льняной пряжи на порядок выше – $E=19500$ МПа. О величинах жесткости при изгибе речь пойдет позже. А пока рассмотрим, как изменится формула Эйлера для упругой нити, огибающей рабочие органы малых размеров кривизны с учетом жесткости нити при изгибе. Не будем останавливаться на исходных уравнениях тех или иных теорий, запишем только результаты, вычислим величины выходных натяжений нити и оценим применимость формул к расчетам технологических процессов.

В книгах И.И. Мигушова [1], В.П. Щербакова [2] из общих уравнений равновесия упругих нитей получена система уравнений для определения натяжения ведущей (сбегающей) ветви нити. Вводится безразмерный коэффициент подобия, коэффициент $k = \frac{H}{2T_1 R^2}$. Здесь H , $cH \cdot \text{мм}^2$ – жесткость

нити при изгибе, R , мм – сумма радиусов цилиндра и нити (радиус осевой линии нити). Этот коэффициент характеризует поведение нити в зависимости от жесткости, натяжения и радиуса цилиндра. Увеличение радиуса или натяжения равносильно уменьшению жесткости. Случай абсолютно гибкой нити соответствует $k=0$. Показано, что жесткость H непосредственно не влияет на натяжение нити, скользящей по круглому цилиндру, но влияет на величину полного действительного охвата φ_0 , уменьшая угол φ , который был бы углом

охвата в предположении идеально гибкой нити. Если угол между прямолинейными отрезками набегающей и сбегающей ветвей нити, где действуют силы T_1 и T_2 , равен φ_T , и $\varphi = \pi - \varphi_T$, то угол действительного охвата $\varphi_0 = \varphi - \gamma_1 - \gamma_2$. Углы изгиба ветвей γ_1 и γ_2 , вызванного влиянием перерезывающих сил, равны

$$\cos \gamma_1 = 1 - k, \quad \cos \gamma_2 = 1 - k \frac{T_1}{T_2}. \quad (2)$$

Уравнение

$$\frac{T_2}{T_1} = e^{\mu \varphi} - k (e^{\mu \varphi} - 1) \quad (3)$$

вместе с соотношениями (2) позволяет найти отношение T_2/T_1 в зависимости от μ , φ и коэффициента подобия k .

Поскольку $e^{\mu \varphi} > 1$, увеличение изгибной жесткости нити приводит к уменьшению отношения T_2/T_1 . При $k=0$, то есть для абсолютно гибкой нити, формула (3) переходит в формулу Эйлера. Заметим, что при $\mu=0$ натяжения ведомой и ведущей ветвей равны ($T_1=T_2$) как для абсолютно гибкой, так и для жесткой при изгибе нити.

Прежде чем перейти к уточнению теории, вычислим натяжение T_2 сначала для идеально гибкой нити, затем для сопротивляющейся изгибу. Конечно, потребуется величина жесткости H . При изучении жесткости текстильных материалов чаще всего встречается задача в следующей постановке: нить длиной ℓ сплошного круглого сечения диаметра d , зашпеленная одним концом, изгибается силой P_1 на другом конце. Решение задачи поперечного изгиба для максимального прогиба дает $u = P_1 \ell^3 / 3H$. Отсюда по известным из опыта величинам u , P_1 , ℓ вычисляется жесткость H . Сразу же возникает вопрос правомерности использования этой формулы для нахождения перемещений точек упругой нити, так как приведенная формула получена для малых перемещений и углов поворота, когда те и другие являются величинами примерно одного порядка. Для текстильных нитей, которые обладают жест-

костью, значительно меньшей, по сравнению с жесткостью элементов конструкций, взаимные перемещения частей нити не малы. Если даже и использовать упомянутую теорию изгиба сопротивления материалов, опыт будет невоспроизводим из-за особенностей структуры и свойств текстильных нитей. Недаром в литературе описаны различные способы экспериментального определения жесткости нити при изгибе, и все они основаны на геометрически нелинейной теории упругих нитей.

Разработанный В.П. Щербаковым и И.Б. Цыгановым метод и способ определения жесткости нити заключается: а) в подготовке образца нитей с пластиной на конце, б) в измерении прогиба нитей, в) в решении системы уравнений. Подробное описание дано в [3], [4]. Здесь же укажем, что реальная схема нагружения нитей сведена к задаче, когда нить изгибается двумя сосредоточенными силами в условиях больших прогибов (рис. 1).

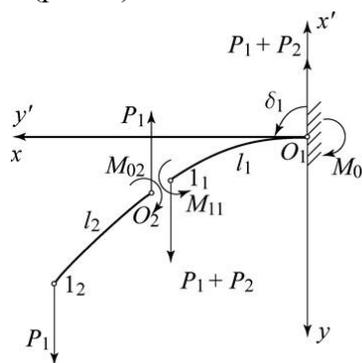


Рис. 1

$$\text{Обозначим: } \omega_1 = \sqrt{\frac{(P_1 + P_2) \ell_1^2}{H}}, \quad \omega_2 = \sqrt{\frac{P_1 \ell_2^2}{H}},$$

$$F(\alpha) = \int_0^\alpha \frac{d\alpha}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \alpha}} - \text{эллиптический интеграл первого рода (постоянная } k \text{ называется модулем, а переменная } \alpha - \text{ амплитудой эллиптического интеграла), } E(\alpha) = \int_0^\alpha \sqrt{1 - k^2 \sin^2 \alpha} d\alpha$$

– эллиптический интеграл второго рода. Для нахождения шести эллиптических параметров k_1 , α_{01} , α_{11} для первого участка и k_2 , α_{02} , α_{12} для второго можно записать шесть уравнений [3...5]:

$$\alpha_{12}=90^\circ, k_1 \sin \alpha_{01}=0,707, F(\alpha_{11})-F(\alpha_{01})=\omega_1, F(k_2)-F(\alpha_{02})=\omega_2,$$

$$k_2 \cos \alpha_{02}=k_1 \cos \alpha_{11}, k_2 \sin \alpha_{02}=k_1 \sin \alpha_{11}.$$

Эксперимент проведен на льняной пряже линейной плотности 86 текс. Получено значение жесткости $H=19,044 \text{ сН} \cdot \text{мм}^2$. Для сравнения – жесткость аппаратной шерстяной пряжи 110 текс равна $H=2,6 \text{ сН} \cdot \text{мм}^2$, чистошерстяной пряжи 31 текс – $H=0,748 \text{ сН} \cdot \text{мм}^2$.

Теперь можем вычислить натяжение T_2 льняной нити при условиях: $T_1=20 \text{ сН}$, $\mu=0,25$, $\varphi=2,5 \text{ рад}$, $R=1,1 \text{ мм}$, $k=\frac{H}{2T_1R^2}=0,393$.

а) Нить идеально гибкая. По формуле (1) имеем $T_{2 \text{ идеальная}}=T_1 e^{\mu\varphi}=37,365 \text{ сН}$.

б) Нить, сопротивляющаяся изгибу. Система уравнений (2), (3) дает $\gamma_1=0,919$, $\gamma_2=0,865$, $T_2=22,376 \text{ сН}$.

Сравнивая полученный результат с предыдущим, видим, что натяжение упругой нити значительно меньше натяжения гибкой нити при одинаковых условиях. Причина расхождения очевидна, она вытекает из хода решения и самих формул: во-первых, при изгибе упругой нити появляется и далее растет с увеличением кривизны перерезывающая сила, натяжение при этом уменьшается; во-вторых, уменьшается угол охвата нитью цилиндра, и, следовательно, сила трения, являющаяся источником увеличения натяжения на участке контакта. В нашем случае действительный угол охвата $\varphi_d=0,716 \text{ рад}$ при $\varphi_{\text{идеальный}}=2,5 \text{ рад}$.

Приведенное решение является неполным. Дело в том, на границе контактной зоны возникает сосредоточенная контактная сила. Необходимость возникновения сосредоточенных реакций в точках набега и схода нити с поверхности показана в [2], [5], [6]. Учет сосредоточенной силы приводит к существенному усложнению решения, хотя результат не вызывает вычислительных трудностей. Трансцендентная система уравнений

$$\frac{T_2}{T_1} = \frac{\cos \gamma_1 + \mu \sin \gamma_1}{\cos \gamma_2 - \mu \sin \gamma_2} e^{\mu(\varphi - \gamma_1 - \gamma_2)} \quad \text{и} \quad \cos \gamma_1 = 1 - k,$$

$\cos \gamma_2 = 1 - k \frac{T_1}{T_2}$ позволяет, как и в предыдущем случае, найти отношение T_2/T_1 в зависимости от μ , φ и коэффициента подобия k . В тех же условиях получим $\gamma_1=0,919$, $\gamma_2=0,702$, $T_2=33,31 \text{ сН}$.

Приближенное решение при малых k [3]. Оценить влияние жесткости нити на натяжение ведущей ветви, используя полученные формулы, затруднительно. Однако, принимая во внимание, что наибольший интерес представляет переход от абсолютно гибкой нити к нити, обладающей жесткостью при изгибе, можно линеаризовать зависимость $\frac{T_2}{T_1}(k)$, полагая k малым.

Опуская промежуточные выкладки, получим

$$\frac{T_2}{T_1} = e^{\mu\varphi} - k(e^{\mu\varphi} - 1)(1 + \mu^2). \quad (4)$$

Вычисления по формуле (4) дают $T_2=30,114 \text{ сН}$.

Задачу можно было бы считать решенной, и, тем не менее, полученное решение требует уточнения. Теория, которой мы воспользовались, не учитывает сдвиговую податливость упругой нити. При выводе уравнений равновесия упругой нити были приняты некоторые допущения, в том числе и следующее: поперечные нормальные сечения нити, плоские до деформации, остаются плоскими и после деформации. Сечения в действительности не остаются нормальными к искривленной оси нити, а несколько перекашиваются. Возникает дополнительная кривизна, связанная с поперечной силой в сечениях нити.

В большинстве практических задач этой особенностью пренебрегают. Но во всех задачах, где имеет место соприкосновение упругой нити с жесткой поверхностью и возникновение *сосредоточенной* силы на границе участка прилегания, надо учесть также и *перекос*, вызванный поперечными силами. Дело в том, что при наличии сдвига упругая линия нити в точке приложения сосредоточенной силы претерпевает излом. Кроме того, здесь необходимо четкое разграничение между углом наклона касательной ϑ' к осевой линии и углом поворота поперечного сечения. Ранее мы их отождествляли. Но теперь отличие угла поворота сечения от ϑ' следует учесть. Для этого воспользуемся теорией С.П. Тимошенко [7], где кроме изгибных перемещений учитываются также и сдвиговые деформации. Теория изгиба, где кроме изгибных учитываются также и сдвиговые перемещения, отождествляется обычно с именем С.П. Тимошенко, и если встречается выражение "балка Тимошенко", то имеется в виду, что речь идет именно об этом.

В технической теории изгиба принимается, что торцевые сечения остаются плоскими. Учтем искривление поперечного сечения, вызванное перерезывающими силами. Для этого среднее касательное напряжение Q/F (F – площадь поперечного сечения нити) делим на модуль сдвига G , а вли-

яние формы поперечного сечения учитывается при помощи коэффициента k_T . Для круглого сечения $k_T = 10/9$. Точное дифференциальное уравнение упругой линии нити в этом случае имеет вид [3], [6]:

$$\frac{1}{\rho} = \frac{M}{H} + m \frac{dQ}{ds}, \quad (5)$$

где $m = \frac{k_T}{GF}$.

В отличие от случая, когда $m=0$, кривизну оси нити нельзя считать непрерывной функцией, причем даже тогда, когда M и Q непрерывны. В уравнение (5) для кривизны входит производная $\frac{dQ}{ds}$, которая зависит от нормальной силы f_v . Но f_v имеет разрыв в точке B , поэтому и кривизна оси нити в этой точке претерпевает разрыв. Приведем фрагменты решения, необходимые для общего представления о задачах с учетом деформаций сдвига.

Вводится обозначение

$$k_2 = \frac{R}{\sqrt{mH}} = \frac{1}{2\sqrt{kk_1}}. \quad (6)$$

В ходе интегрирования появляются произвольные постоянные:

$$C_1 = \frac{T_1 \sin \gamma_1 + T_2 \sin \gamma_2 e^{-k_2(\varphi - \gamma_1 - \gamma_2)}}{1 - e^{-2k_2(\varphi - \gamma_1 - \gamma_2)}}, \quad C_2 = \frac{T_2 \sin \gamma_2 + T_1 \sin \gamma_1 e^{-k_2(\varphi - \gamma_1 - \gamma_2)}}{1 - e^{-2k_2(\varphi - \gamma_1 - \gamma_2)}},$$

$$C_3 = T_1 \cos \gamma_1 - \frac{C_1(1 - \mu k_2)}{\mu + k_2} - \frac{C_2(\mu k_2 + 1)}{k_2 - \mu} e^{-k_2(\varphi - \gamma_1 - \gamma_2)}.$$

Натяжение определяется выражением:

$$T_2 \cos \gamma_2 = C_3 e^{\mu(\varphi - \gamma_1 - \gamma_2)} + \frac{C_1(1 - \mu k_2)}{\mu + k_2} e^{-k_2(\varphi - \gamma_1 - \gamma_2)} + \frac{C_2(\mu k_2 + 1)}{k_2 - \mu}. \quad (7)$$

Это уравнение определяет зависимость между натяжением ведущей T_2 и ведомой T_1 ветвей нити. Но нам недостает еще двух

уравнений для определения γ_1 и γ_2 . Эти уравнения получаем из условия непрерывности изгибающего момента:

$$H + Hmk_2 \left[C_1 + C_2 e^{-k_2(\varphi - \gamma_1 - \gamma_2)} \right] = R \sqrt{2HT_1 (1 - \cos \gamma_1) \left[1 + \frac{mT_1}{2} (1 + \cos \gamma_1) \right]}, \quad (8)$$

$$H + Hmk_2 \left[C_1 e^{-k_2(\varphi - \gamma_1 - \gamma_2)} + C_2 \right] = R \sqrt{2HT_2 (1 - \cos \gamma_2) \left[1 + \frac{mT_1}{2} (1 + \cos \gamma_2) \right]}. \quad (9)$$

Исследование равновесия упругой нити с учетом сосредоточенных сил и сдвиговых деформаций представляет большие вычислительные трудности. Решение задачи проводится исключительно с помощью специально разработанной программы.

Только теперь можно считать, что поставленная задача о взаимодействии сопротивляющейся изгибу упругой нити с шероховатым цилиндром решена в достаточной полноте, при этом кроме изгибных перемещений учтены и сдвиговые перемещения, а также сосредоточенные силы на границах участков контакта и излом упругой линии нити в точках приложения сосредоточенных сил.

Как видим, получены три различных решения задачи взаимодействия нити с цилиндром: а) нить принята абсолютно гибкой; б) упругая нить сопротивляется изгибу; в) сопротивляющаяся изгибу упругая нить представлена с учетом сосредоточенных сил на границах участков контакта с цилиндром и излома упругой линии нити в точках приложения сосредоточенных сил. Выражения для натяжения сбегающей (ведущей) ветви нити получились, естественно, различными. Какие из этих выражений можно принять для расчетов?

Прежде всего, нужно четко оговорить область равновесия нити на цилиндрической поверхности. Формулой Эйлера (1) для абсолютно гибкой нити на шероховатой поверхности кругового цилиндра успешно пользуются с 1775 г. в условиях, когда перерезывающими силами по сравнению с осевой силой (натяжением) можно пренебречь. Указанное явление имеет место в том случае, когда поперечные размеры нити несоизмеримо меньше диаметра взаимодействующего с ней цилиндра. Что же касается упругой нити, то вероятнее всего верны выражения, которые здесь отнесены к случаю "в)". В самом решении

"б)" без учета сосредоточенных сил не выполняются условия стыковки участков входа и схода нити с областью линейного контакта нити с цилиндром. Численные расчеты должны оценить влияние сосредоточенных нормальных реакций и сил трения на величину натяжения.

Вычислим натяжение в случае "в)" при тех же условиях, что и в двух предыдущих. В результате получено натяжение нити $T_{2\text{сдвиг}} = 31,8 \text{ сН}$, превосходящее натяжение той же упругой нити при том же нагружении почти в полтора раза ($T_2 = 22,4 \text{ сН}$). Подводя итог оценке взаимодействия нитей с рабочими органами текстильных машин, примем во внимание два обстоятельства. Во-первых, ни в одной из работ, посвященных расчету натяжения нити при огибании ею цилиндра, нет учета сдвиговых деформаций. Также почти всегда, за редким исключением, игнорируются сосредоточенные силы. Даже в известной статье П.М. Огибалова, А.Л. Рабиновича, Н.М. Федотова 1939 г. пропущена сосредоточенная сила трения. Во-вторых, любой текстильный материал: нить, пряжа, ткань, трикотаж – все это существует как единое изделие только постольку, поскольку упругие волокна и нити взаимодействуют между собой. Показано, что даже при отсутствии внешней нагрузки имеются натяжение волокон в пряже, нитей в полотнах, а также перерезывающие силы, изгибающие и крутящие моменты. И объяснение всему этому следует искать в упругой природе текстильного материала. Расчеты же внутренних сил и моментов возможны лишь на основе механики упругой или вязкоупругой нити.

ЛИТЕРАТУРА

1. Мигушов И.И. Механика текстильной нити и ткани. – М.: Легкая индустрия, 1980.
2. Щербаков В.П. Прикладная механика нити. – М.: МГТУ имени А. Н. Косыгина, 2001.

3. Щербаков В.П. Прикладная и структурная механика волокнистых материалов. – М.: "Тисо Принт", 2013.

4. Щербаков В.П., Скуланова Н.С. Основы теории деформирования и прочности текстильных материалов. – М., 2008.

5. Попов Е.П. Теория и расчет гибких упругих стержней. – М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1986.

6. Кagan В.М. Взаимодействие нити с рабочими органами текстильных машин. – М.: Легкая и пищевая промышленность, 1984.

7. Тимошенко С.П. Сопротивление материалов. – М., 1965, т. 1,2.

REFERENCES

1. Migushov I.I. Mekhanika tekstil'noy niti i tkani. – М.: Legkaya industriya, 1980.

2. Shcherbakov V.P. Prikladnaya mekhanika niti. – М.: MGTU imeni A. N. Kosygina, 2001.

3. Shcherbakov V.P. Prikladnaya i strukturnaya mekhanika voloknistykh materialov. – М.: "Tiso Print", 2013.

4. Shcherbakov V.P., Skulanova N.S. Osnovy teorii deformirovaniya i prochnosti tekstil'nykh materialov. – М., 2008.

5. Popov E.P. Teoriya i raschet gibkikh uprugikh stержney. – М.: Nauka. Gl. red. fiz.-mat. lit., 1986.

6. Kagan V.M. Vzaimodeystvie niti s rabochimi organami tekstil'nykh mashin. – М.: Legkaya i pishchевaya promyshlennost', 1984.

7. Timoshenko S.P. Soprotivlenie materialov. – М., 1965, t. 1,2.

Рекомендована кафедрой текстильных технологий РГУ имени А.Н. Косыгина. Поступила 19.02.21.