

УДК [677.025.071.252.4 : 677.53] : 677.071.4

ТЕОРИЯ И КРИТЕРИИ ОБРАЗОВАНИЯ СУКРУТИН ПРИ ВЯЗАНИИ

В. П. ЩЕРБАКОВ, В. А. ЗАВАРУЕВ

(Московский государственный текстильный университет им. А. Н. Косыгина)

Особую важность в процессе вязания имеет устойчивость высокомодульных нитей, в частности металлических. Они перерабатываются на основовязальных и кулирных машинах в виде одиночной проволоки или пряжи бесконечных волокон очень малой линейной плотности (до 15 мкм). При этом монопить и прядь ни в каком случае не должны быть скручены как в естественном состоянии, так и при вязании. Формирование паковок, на которые навита нить, система подачи нити исключают возможность ее скручивания, так как вследствие большой жесткости даже небольшой крутящий момент может привести к потере устойчивости нити перед входом в петлеобразующую систему.

Вопрос об устойчивости прямолинейного упругого стержня, находящегося под действием приложенных к его концам сжимающих сил и скручивающих моментов, был рассмотрен еще в 1883г. И до сих пор для оценки устойчивости упругой нити используется условие, полученное в [1]. Однако следует заметить, что уравнения Greenhill являются неполными: в них пропущены дополнительные опорные реакции, направленные перпендикулярно оси стержня. В [2] получено уточненное решение задачи об устойчивости прямолинейной формы равновесия сжатого и скрученного стержня. И хотя в этом исследовании рассмотрен сжатый стержень, исходные дифференциальные уравнения в форме уравнений Кирхгофа и полученное решение может быть распространено и на растянутый стержень. В [2] замечено, что отрицательные значения одного из парамет-

ров трансцендентного уравнения, связанного с определением критической длины, соответствуют отрицательным значениям продольной силы, то есть растяжению стержня. Однако использовать решение [2] для оценки устойчивости скрученной и растянутой упругой нити нельзя, так как условия закрепления концов нити в задачах Николаи не соответствуют условиям переработки нити на трикотажных машинах.

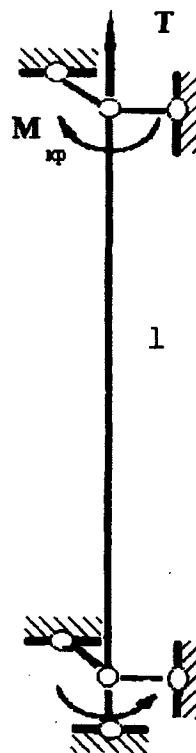


Рис. 1

В настоящей работе дано точное решение задачи определения критического крутящего момента и критической длины

шарнирно закрепленной растянутой нити (рис. 1) в зависимости от растягивающей силы.

Положим, что к концам нити приложены растягивающие силы (натяжение) T и крутящие моменты $M_{кр}$. Будем искать те значения длины нити l , при которых рядом с прямолинейной формой возможна и искривленная форма равновесия нити. Наименьшее из этих значений длины нити и есть критическая длина, за которой прямолинейная форма равновесия нити теряет устойчивость. Те же определения относятся и к крутящему моменту.

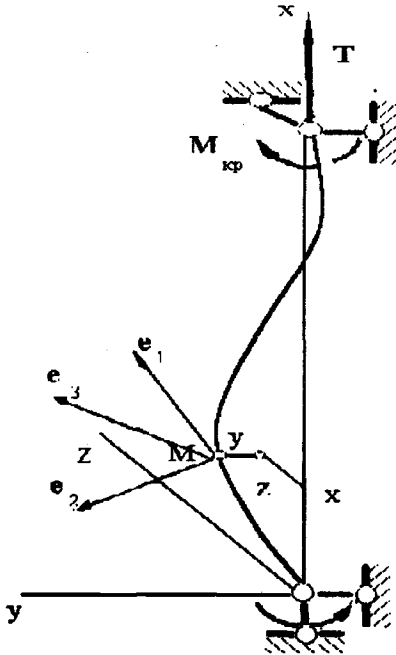


Рис. 2

Под действием внешних сил и моментов возникает искривление оси нити и нить переходит в новую искривленную форму равновесия (рис.2). Положим, что произошло ничтожно малое искривление оси нити и что нить находится в искривленном состоянии равновесия, бесконечно близком к ее первоначальному состоянию. Введем ортогональную систему координат, жестко связанную с осевой линией нити. Направим ось, определяемую единичным вектором e_1 , по касательной к искривленной оси в сторону возрастания дуговой координаты s . В связанных осях компоненты векторов внутренних сил Q и моментов M имеют четкий физический

смысл: Q_1 – осевая сила; Q_2 и Q_3 – перерезывающие силы; M_1 – крутящий момент, M_2 и M_3 – изгибающие моменты.

Проекция осевой линии имеет кривизны κ_2 и κ_3 , которые являются проекциями кривизн пространственной осевой линии. Кроме изгиба в двух взаимно перпендикулярных плоскостях моментами M_2 и M_3 элемент нити скручивается еще моментом M_1 , что приводит к кручению осевой линии нити, которое характеризуется компонентой κ_1 . Моменты пропорциональны изменениям кривизн осевой линии нити:

$$M_1 = A_1 \kappa_1, \quad M_2 = A \kappa_2, \quad M_3 = A \kappa_3. \quad (1)$$

Здесь A_1 – жесткость нити при кручении, A – жесткость нити при изгибе.

При перемещении трехгранника осей по пространственной кривой оси поворачиваются по отношению к первоначальному положению. Новое положение осей определяется с помощью трех независимых углов ϑ_1, ϑ_2 и ϑ_3 . Вектор κ , характеризующий изменение положения осей, связан с этими углами соотношениями

$$\kappa_1 = \frac{d\vartheta_1}{ds}, \quad \kappa_2 = \frac{d\vartheta_2}{ds}, \quad \kappa_3 = \frac{d\vartheta_3}{ds}. \quad (2)$$

Запишем уравнения равновесия нити в проекциях на связанные оси [3]:

$$\frac{dQ_1}{ds} + Q_3 \frac{d\vartheta_2}{ds} - Q_2 \frac{d\vartheta_3}{ds} = 0,$$

$$\frac{dQ_2}{ds} + Q_1 \frac{d\vartheta_3}{ds} - Q_3 \frac{d\vartheta_1}{ds} = 0, \quad (3)$$

$$\frac{dQ_3}{ds} + Q_2 \frac{d\vartheta_1}{ds} - Q_1 \frac{d\vartheta_2}{ds} = 0;$$

$$\frac{dM_1}{ds} + M_3 \frac{d\vartheta_2}{ds} - M_2 \frac{d\vartheta_3}{ds} = 0,$$

$$\frac{dM_2}{ds} + M_1 \frac{d\vartheta_3}{ds} - M_3 \frac{d\vartheta_1}{ds} - Q_3 = 0, \quad (4)$$

$$\frac{dM_3}{ds} + M_2 \frac{d\vartheta_1}{ds} - M_1 \frac{d\vartheta_2}{ds} + Q_2 = 0.$$

Сосредоточенные силы и моменты, приложенные в конечных сечениях (при $s = \ell$), можно учитывать через краевые условия, поэтому они в уравнения равновесия не входят.

$$\frac{dQ_1}{ds} = 0, \quad \frac{dQ_2}{ds} + T \frac{d\vartheta_3}{ds} = 0, \quad \frac{dQ_3}{ds} - T \frac{d\vartheta_2}{ds}; \quad (6)$$

$$\frac{dM_1}{ds} = 0, \quad \frac{dM_2}{ds} + M_1 \frac{d\vartheta_3}{ds} - Q_3 = 0, \quad \frac{dM_3}{ds} - M_1 \frac{d\vartheta_2}{ds} + Q_2 = 0.$$

Из второго и третьего уравнений (6) будем иметь

$$Q_2 = -T\vartheta_3 + Q_A, \quad Q_3 = T\vartheta_2 + Q_B, \quad (7)$$

где Q_A, Q_B – произвольные постоянные, представляющие собой дополнительные опорные реакции. Они существенно зависят от условий закрепления концов нити и должны быть приняты во внимание, когда оба конца нити неподвижно заделаны. Для случая шарнирного опирания концов следует принять $Q_A = Q_B = 0$.

Далее подставим найденные значения Q_2 и Q_3 в последние два уравнения (6), приняв во внимание соотношения (1) и (2). Тогда уравнения упругой линии запишутся следующим образом:

$$A \frac{d^2\vartheta_3}{ds^2} = T\vartheta_3 + M_1 \frac{d\vartheta_2}{ds}, \quad (8)$$

$$A \frac{d^2\vartheta_2}{ds^2} = T\vartheta_2 - M_1 \frac{d\vartheta_3}{ds}.$$

Решение этой системы представим в виде

Углы ϑ_2 и ϑ_3 связаны с перемещениями u_1 и u_2 зависимостями

$$\frac{du_2}{ds} = \vartheta_3, \quad \frac{du_3}{ds} = -\vartheta_2. \quad (5)$$

Отметим, что компоненты сил и моментов Q_1 и M_1 отличаются от величин T и $M_{кр}$ на ничтожно малые величины, компоненты же Q_2, Q_3, M_2, M_3 сами являются ничтожно малыми величинами. Отбросив в уравнениях (3) и (4) малые величины высшего порядка малости, получим

$$\vartheta_3 = C_1 \cos k_1 s + C_2 \sin k_1 s + C_3 \cos k_2 s + C_4 \sin k_2 s, \quad (9)$$

$$\vartheta_2 = C_1 \sin k_1 s - C_2 \cos k_1 s + C_3 \sin k_2 s - C_4 \cos k_2 s.$$

Здесь C_1, C_2, C_3, C_4 – произвольные постоянные; k_1 и k_2 – корни квадратного уравнения

$$k^2 + \frac{M_1}{A} k + \frac{T}{A} = 0; \quad (10)$$

$$k_1 = -\frac{M_1}{2A} + \sqrt{\frac{M_1^2}{4A^2} - \frac{T}{A}}, \quad (11)$$

$$k_2 = -\frac{M_1}{2A} - \sqrt{\frac{M_1^2}{4A^2} - \frac{T}{A}}.$$

Произвольные постоянные определяем из условий равенства нулю перемещений и кривизн изогнутой оси нити на ее концах. Кривизны k_2 и k_3 в соответствующих плоскостях равны производным

$$\begin{aligned} \frac{d\theta_3}{ds} = & -k_1 C_1 \sin k_1 s + \\ & + k_1 C_2 \cos k_1 s - k_2 C_3 \sin k_2 s + \\ & + k_2 C_4 \cos k_2 s; \end{aligned} \quad (12)$$

$$\begin{aligned} \frac{d\theta_2}{ds} = & k_1 C_1 \cos k_1 s + \\ & + k_1 C_2 \sin k_1 s + \\ & + k_2 C_3 \cos k_2 s + k_2 C_4 \sin k_2 s. \end{aligned}$$

В нашем случае шарнирно закрепленной нити на концах $s=0$ и $s=\ell$ изгибающие моменты обращаются в нуль и мы имеем на концах нити кривизны изогнутой оси нити, равные нулю.

$$\text{При } s=0 \quad \frac{d\theta_3}{ds} = k_1 C_2 + k_2 C_4 = 0,$$

$$\frac{d\theta_2}{ds} = k_1 C_1 + k_2 C_3 = 0.$$

При $s=\ell$

$$\frac{d\theta_3}{ds} = k_1 C_1 \sin k_1 \ell - k_1 C_2 \cos k_1 \ell +$$

$$+ k_2 C_3 \sin k_2 \ell - k_2 C_4 \cos k_2 \ell = 0,$$

$$\frac{d\theta_2}{ds} = k_1 C_1 \cos k_1 \ell + k_1 C_2 \sin k_1 \ell +$$

$$+ k_2 C_3 \cos k_2 \ell + k_2 C_4 \sin k_2 \ell = 0.$$

Выразим постоянные C_3 и C_4 через C_1 и C_2 и из последних двух уравнений получим

$$\begin{aligned} & C_1 (\sin k_1 \ell - \sin k_2 \ell) - \\ & - C_2 (\cos k_1 \ell - \cos k_2 \ell) = 0, \\ & C_1 (\cos k_1 \ell - \cos k_2 \ell) + \\ & + C_2 (\sin k_1 \ell - \sin k_2 \ell) = 0. \end{aligned} \quad (13)$$

Система уравнений (13) имеет отличные от нуля решения, если определитель ее будет равен нулю:

$$\det = \begin{vmatrix} \sin k_1 \ell - \sin k_2 \ell - \cos k_1 \ell + \cos k_2 \ell \\ \cos k_1 \ell - \cos k_2 \ell \sin k_1 \ell - \sin k_2 \ell \end{vmatrix} = 0.$$

Отсюда следует, что

$$\cos(k_2 - k_1)\ell = 1 \text{ или } (k_2 - k_1)\ell = 2\pi. \quad (14)$$

Но согласно формулам (11)

$$k_2 - k_1 = 2\sqrt{\frac{M_1^2}{4A^2} - \frac{T}{A}}$$

и, следовательно,

$$\sqrt{\frac{M_1^2}{4A^2} - \frac{T}{A}} = \frac{\pi}{\ell}. \quad (15)$$

Критическая сжимающая сила, соответствующая так называемому основному эйлеровскому случаю, равна

$$P_3 = \frac{\pi^2 A}{\ell^2}. \quad (16)$$

Тогда для критического крутящего момента получаем выражение

$$M_{1\text{кр}} = 2\sqrt{A}\sqrt{P_3 + T}. \quad (17)$$

Таким образом, при увеличении натяжения T критический крутящий момент, при котором происходит потеря устойчивости нити, возрастает. Корректные и точные экспериментальные исследования [1], в которых Е.Б. Беловым установлены новые качественные и количественные зависимости параметров, определяющих напряженно-деформированное состояние нити при кручении, в полной мере подтверждают построенную теорию.

Величина натяжения, при котором возможна подача нити к петлеобразующим

органам без образования сукрутин, определится неравенством

$$T > \frac{M_1^2}{4A} - P_3, \quad (18)$$

где P_3 – эйлерова сила, определяемая соотношением (16).

Как частный случай из общего условия (17) можно получить условие потери устойчивости крученого продукта при отсутствии натяжения. Положим в (17) $T=0$; кроме того учтем, что крутящий момент скрученной нити или пряжи является распределенным, то есть отнесенным к единице длины: $M_{1\text{кр}} = \mu_1 \text{кр} \ell$.

Тогда получаем критерий устойчивости нити в форме

$$\frac{M_{1\text{кр}}}{A} = 2\pi, \quad (19)$$

которым предпочтительнее пользоваться для оценки неравновесности образца в отличие от субъективных методов, обычно применяемых в текстильном материаловедении.

Располагая точным решением задачи об устойчивости формы равновесия растянутой и скрученной упругой нити, дадим оценку решения приближенных дифференциальных уравнений, в которых кривизна принята равной

$$k \approx y''.$$

Составим дифференциальное уравнение изогнутой оси в предположении, что перемещения малы [3]. В сечении x (рис. 2) изгибающие моменты от силы T и крутящего момента M_1 равны

в плоскости xy : Ty и $M_1 z'$;

в плоскости xz : Tz и $-M_1 y'$.

Знак перед моментом здесь взят в соответствии с обычным правилом знаков, применяемым в сопротивлении материалов: «плюс» берется, если момент направлен в сторону увеличения положительной кривизны в соответствующей плоскости;

«минус» – момент уменьшает положительную кривизну.

Теперь уравнения упругой линии запишем в виде

$$Ay'' = Ty + M_1 z', \quad Az'' = Tz - M_1 y'. \quad (20)$$

Решение этой системы представим в виде

$$y = C_1 \cos k_1 x + C_2 \sin k_1 x + C_3 \cos k_2 x + C_4 \sin k_2 x, \quad (21)$$

$$z = C_1 \sin k_1 x - C_2 \cos k_1 x +$$

$$+ C_3 \sin k_2 x - C_4 \cos k_2 x,$$

где k_1 и k_2 – корни квадратного уравнения (10).

В нашем случае имеем граничные условия:

$$\text{при } x=0 \quad y=z=0,$$

$$\text{при } x=\ell \quad y=z=0.$$

С их учетом из системы (21) получаем четыре уравнения

$$C_1 + C_3 = 0,$$

$$C_2 + C_4 = 0,$$

$$C_1 \cos k_1 \ell + C_2 \sin k_1 \ell + C_3 \cos k_2 \ell + C_4 \sin k_2 \ell = 0, \quad (22)$$

$$+ C_3 \cos k_2 \ell + C_4 \sin k_2 \ell = 0,$$

$$C_1 \sin k_1 \ell - C_2 \cos k_1 \ell +$$

$$+ C_3 \sin k_2 \ell - C_4 \cos k_2 \ell = 0.$$

Как уже отмечалось, система уравнений (22) может иметь отличные от нуля решения, если определитель ее будет равен нулю:

$$\det = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ \cos k_1 \ell & \sin k_1 \ell & \cos k_2 \ell & \sin k_2 \ell \\ \sin k_1 \ell & -\cos k_1 \ell & \sin k_2 \ell & -\cos k_2 \ell \end{vmatrix} = 0.$$

При натяжении $T=0$

Раскрывая определитель, получаем $\cos(k_2 - k_1)\ell = 1$, что полностью совпадает с решением (14) точных дифференциальных уравнений нелинейной теории. Вывод, который может быть сделан из только что указанного обстоятельства, состоит в том, что линеаризованное дифференциальное уравнение достаточно для исследования критических состояний скрученной и растянутой нити. Конечно, после достижения нагрузкой критического значения зависимость между нагрузкой и вызываемым ею прогибом не может быть получена из приближенного уравнения изогнутой оси. Но нас интересуют прежде всего условия потери устойчивости нити и, как показали решения по точной и приближенной теориям, обычные линейные уравнения сопротивления материалов пригодны для изучения поведения нити при кручении.

На основе изложенной теории выведем критерий потери устойчивости металлической монопилы. Обозначим через φ угол, на который одно концевое сечение нити закручено по отношению к другому. Имеем

$$\varphi = k_1 \ell = \frac{M_1}{A_1} \ell.$$

Из формулы (15) получаем

$$M_{1 \text{ кр}} = 2 \sqrt{TA + \frac{\pi^2 A^2}{\ell^2}}.$$

Подставляя в формулу для φ , находим

$$\varphi_{\text{кр}} = \frac{2 \sqrt{TA + \frac{\pi^2 A^2}{\ell^2}}}{A_1} \ell. \quad (23)$$

$$\varphi_{\text{кр}} = 2\pi \frac{A}{A_1}. \quad (24)$$

Для нити круглого сечения $A = \frac{\pi d^4}{64} E$, $A_1 = \frac{\pi d^4}{32} G$, где E – модуль упругости, G – модуль сдвига. С учетом $G = \frac{E}{2(1+\nu)}$ (здесь ν – коэффициент Пуассона) окончательно получим

$$\varphi_{\text{кр}} = 2\pi(1+\nu). \quad (25)$$

В [4] приведены данные для постоянных упругости, полученные Кестером и опубликованные им в серии статей, представляющих к настоящему времени главный источник по изучению модулей упругости, определенных из вибрационных испытаний. Так, для молибдена коэффициент Пуассона $\nu=0,31$, для вольфрама – $\nu=0,30$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Белов Е. Б. Разработка технологии получения фасонной пряжи на основе изучения механизма поведения нитей при кручении. Дис. ... канд. техн. наук. – СПбУТД, 1999.
2. Николаи Е.Л. Труды по механике. – М.: Изд-во технико-теоретической литературы, 1955.
3. Феодосьев В. И. Избранные задачи и вопросы по сопротивлению материалов. – М.: Наука, 1996.
4. Белл Ф. Дж. Экспериментальные основы механики деформируемых твердых тел. Ч. 1. – М.: Наука, 1984.

Рекомендована кафедрой механической технологии волокнистых материалов. Поступила 29.03.01.