

## МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ТЕПЛОМАССОБМЕННЫХ ПРОЦЕССОВ ВО ВРАЩАЮЩИХСЯ БАРБОТАЖНЫХ СКРУББЕРАХ

П.А. ГОРШЕНИН

(Российский заочный институт текстильной и легкой промышленности)

В связи с тем, что использование на текстильных предприятиях высокоскоростных чесальных машин сопровождается повышенным выделением в окружающую среду сорных примесей, а также пуха и пыли, вызывая ухудшение физического состояния работников, актуальной является разработка эффективных аппаратов для очистки воздуха.

Решение поставленной задачи осуществляется при использовании наиболее интенсивного на современном этапе метода проведения массообмена между газом и жидкостью во вращающемся барботажном слое [1].

Для разработки методики расчета аппаратов с вращающимся барботажным слоем необходимо проведение математического моделирования тепломассообменных процессов при движении газовых пузырьков во вращающемся слое жидкости.

Результаты такого моделирования, полученные в [2, 3], ограничены в основном областью сравнительно малых значений критериев Пекле и Фурье, что сужает сферу использования этих результатов для анализа задачи тепло- и массообмена в поле высоких центростремительных ускорений, где числа Рейнольдса могут достигать значений  $10^3$ - $10^4$  в отсутствие существенной деформации поверхности.

Профиль скоростей внутри сферических капель, движущихся с большими скоростями [4, 5], удовлетворительно описывается функцией тока Хилла [6]:

$$\theta = \frac{3}{4} u_{\text{п}} \left[ 1 - \frac{r}{(d_{\text{п}}/2)^2} \right]^2 r^2 \sin \theta. \quad (1)$$

Введем сферическую систему координат, полярная ось которой направлена в

сторону, противоположную направлению подъема газового пузырька [7]. В рамках модели Хилла уравнение конвективной теплопроводности может быть записано в виде

$$\frac{\partial T}{\partial t} = a \left( \frac{\partial^2 T}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 T}{\partial \theta^2} \right) + \left( \frac{2a}{r} - v_r \right) \frac{\partial T}{\partial r} + \left( \frac{a \operatorname{ctg} \theta}{r^2} - \frac{v_{\theta}}{r} \right) \frac{\partial T}{\partial \theta}, \quad (2)$$

где

$$v_r = -\frac{3}{2} u_{\text{п}} \left( 1 - \frac{r^2}{R_{\text{п}}^2} \right) \cos \theta, \quad (3)$$

$$v_{\theta} = \frac{3}{2} u_{\text{п}} \left( 1 - \frac{2r^2}{R^2} \right) \sin \theta. \quad (4)$$

В уравнениях [2 ... 4] полярная ось предполагается направленной в сторону, противоположную направлению движения пузыря;  $u_{\text{п}}$  и  $R$  обозначают соответственно скорость всплытия пузыря и его радиус (форма пузыря считается сферической, изменение объема за счет теплопроводности не учитывается). Распределение скоростей, описываемое формулами (3) и (4), может быть получено из известного распределения Адамара-Рыбчинского, если в последнем произвести формальную замену  $[u_{\text{ап}}/(1+\mu)] \rightarrow 3u_{\text{п}}$ , где  $u_{\text{ап}}$  – скорость свободного движения пузыря в поле силы тяжести при  $Re \ll 1$ , то есть в режиме безотрывного обтекания;  $\mu$  – отношение динамических вязкостей дисперсной и сплошной фаз. По этой причине решения

уравнения конвективной теплопроводности, соответствующего полю скоростей Адамара-Рыбчинского, и полю, описываемому формулами (3), (4), не будут формально отличаться друг от друга, если числа Пекле для указанных гидродинамических режимов определить как  $Pe_{ap} = u_{ap}R/2(1+\mu)$  и  $Pe = 3u_{п}R/2a$ .

В дальнейшем уравнение (2) будем решать при следующих краевых условиях:

$$T(r, \theta, 0) = T_0; \quad T(R, \theta, t) = T_1; \\ T(0, \theta, t) / < \infty; \quad (5)$$

$$\frac{\partial T(r, 0, t)}{\partial \theta} = \frac{\partial T(r, \pi, t)}{\partial \theta} = 0.$$

Используя безразмерные переменные

$$T = (T - T_0) / (T_1 - T_0); \quad y = r/R; \quad (6)$$

$$\tau = at/R^2; \quad Pe = 3u_{п}R/2a,$$

приведем (2) и краевые условия к виду

$$\frac{\partial T}{\partial \tau} = \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{1}{y^2} \frac{\partial^2 T}{\partial \theta^2} + \\ + \left[ \frac{2}{y} + Pe(1-y^2)\cos\theta \right] \frac{\partial T}{\partial y} + \\ + \left[ \frac{ctg\theta}{y^2} - \frac{Pe}{y}(1-2y^2)\sin\theta \right] \frac{\partial T}{\partial \theta}, \quad (7)$$

$$T(y, \theta, 0) = 0; \quad (8)$$

$$T(1, \theta, \tau) = 1; \quad (9)$$

$$T(0, \theta, \tau) / < \infty; \quad (10)$$

$$\frac{\partial T(y, 0, \tau)}{\partial \theta} = \frac{\partial T(y, \pi, \tau)}{\partial \theta} = 0. \quad (11)$$

Согласно условиям (8) и (9) функция  $T(1, \theta, \tau)$  разрывна в точке  $\tau=0$ . Чтобы избежать от разрывов при численном расчете, введем новую неизвестную функцию  $u(y, 0, \tau)$ , определяемую соотношением

$$u = T - 1 + \Phi\left(\frac{1-y}{\sqrt{2\tau}}\right), \quad (12)$$

где  $\Phi(x)$  – интеграл вероятности. Функция  $u$ , как следует из соотношений (7...11), должна удовлетворять уравнению

$$\frac{\partial u}{\partial \tau} = \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{1}{y} \frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} + \left[ \frac{2}{y} + \right. \\ \left. + Pe(1-y^2)\cos\theta \right] \frac{\partial u}{\partial y} + \left[ \frac{ctg\theta}{y^2} - \right. \\ \left. - \frac{Pe}{y}(1-2y^2)\sin\theta \right] \frac{\partial u}{\partial \theta} + \left[ \frac{2}{y} + \right. \\ \left. + Pe(1-y^2)\cos\theta \right] (\pi\tau)^{-1/2} e^{-(1-y)^2/4\tau} \quad (13)$$

с краевыми условиями

$$u(y, \theta, 0) = 0; \quad u(1, \theta, \tau) = 1; \quad u(0, \theta, \tau) / < \infty;$$

$$\frac{\partial u(y, 0, \tau)}{\partial \theta} = \frac{\partial u(y, \pi, \tau)}{\partial \theta} = 0. \quad (14)$$

Поскольку коэффициенты при первых производных в уравнении (13) вблизи центра пузыря возрастают с ростом числа Пекле, то для обеспечения равномерной точности расчетной конечно-разностной схемы целесообразно сгущать сетку в окрестности точки  $y=0$ . С этой целью в исходном уравнении и краевых условиях было введено преобразование  $y = \theta^{-s}$  и сетка строилась в координатах  $s, \theta$ .

При решении использовали локально-одномерный метод переменных направлений Самарского. В направлении  $\theta$  решали одномерное уравнение в момент времени  $\tau_{j-1/2}$ :

$$\frac{1}{\sin\theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \sin\theta \frac{\partial u}{\partial \theta} \right) + \\ + Pe e^{-s} (2e^{-2s} - 1) \sin\theta \frac{\partial u}{\partial \theta} = -e^{-2s} \frac{\partial u}{\partial \tau} \quad (15)$$

с граничными условиями

$$\partial u(s, 0, \tau) / \partial \theta = \partial u(s, \pi, \tau) / \partial \theta = 0.$$

В направлении  $s$  решали уравнение в момент времени  $\tau_{j+1}$ :

$$e^s \frac{\partial}{\partial s} \left( e^s \frac{\partial u}{\partial s} \right) - [Pe e^{-s} (1 - e^{-2s}) \cos \theta] + f(s, \theta, \tau) = \frac{1}{2} e^{-2s} \frac{\partial u}{\partial \tau}, \quad (16)$$

где

$$f(s, \theta, \tau) = [2e^{-s} + Pe e^{-2s} (1 - e^{-2s}) \cos \theta] \frac{1}{\sqrt{\pi \tau}} e^{-(1-e^{-s})^2 / 4\tau} \quad (17)$$

с граничными условиями  $u(0, \theta, \tau) = 0$ ;  $u(\infty, \theta, \tau) < \infty$ .

Разностную аппроксимацию уравнений (15) и (16) осуществляли при помощи монотонной неявной схемы Самарского для несамосопряженного эллиптического оператора. Схема расположения точек, с помощью которых производилась аппроксимация уравнений, представлена на рис. 1.

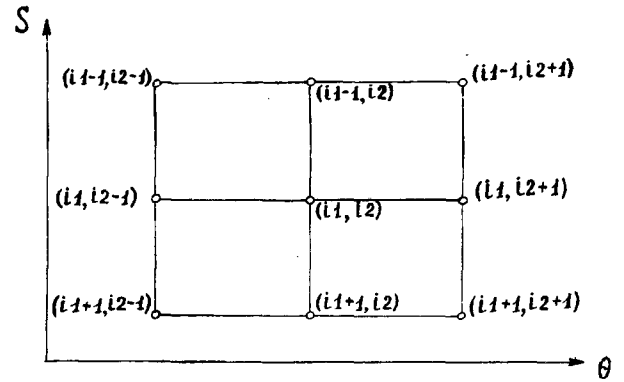


Рис. 1

Существующие разностные уравнения имеют вид:

$$\frac{1}{\sin \theta_{i2}} \left( a_2^+ \frac{u_{il, i2+1}^{j+1/2} - u_{il, i2}^{j+1/2}}{h^2} - a_2 \frac{u_{il, i2}^{j+1/2} - u_{il, i2-1}^{j+1/2}}{h^2} \right) + Pe (b_2^+ a_2^+ \frac{u_{il, i2+1}^{j+1/2} - u_{il, i2}^{j+1/2}}{h} + b_2^- a_2 \frac{u_{il, i2}^{j+1/2} - u_{il, i2-1}^{j+1/2}}{h}) = e^{-2s} \frac{u_{il, i2}^{j+1/2} - u_{il, i2}^j}{e}, \quad (18)$$

где  $a_2^+ = \sin \theta_{i2} + 1/2$ ;  $a_2 = \sin \theta_{i2} - 1/2$ ;

$r_2 = (2e^{-2s} - 1)e^{-s} \sin \theta$ ;  $r_2^\pm = 0,5(r_2 \pm / r_2 /)$ ;

$$b_2^\pm = \frac{r_2^\pm}{\sin \theta_{i2}} (2e^{-2s} - 1)e^{-s}$$

для  $0 \leq il \leq N-1$ ;  $1 \leq i2 \leq M-1$  в направлении  $\theta$  и

$$e^{s_{i1}} \left( a_1 \frac{u_{i1-1, i2}^{j+1} - u_{i1, i2}^{j+1}}{h^2} - a_1^+ \frac{u_{i1, i2}^{j+1} - u_{i1+1, i2}^{j+1}}{h^2} \right) + b_1^+ a_1 \frac{u_{i1-1, i2}^{j+1} - u_{i1, i2}^{j+1}}{h} + b_1^- a_1^+ \frac{u_{i1, i2}^{j+1} - u_{i1+1, i2}^{j+1}}{h} - b_1 e^{-2s_{i1}} u_{i1, i2}^{j+1} + f(s_{i1}, \theta_{i2}, (j+1)e) = e^{-2s_{i1}} \frac{u_{i1, i2}^{j+1} - u_{i1, i2}^j}{e}, \quad (19)$$

$$\text{где } a_1^+ = e^{-s_1} + 1/2h; \quad a_1 = e^{-s_1} - 1/2h;$$

$$u_{N,i_2}^{j+1} = 0. \quad (20)$$

$$r_1 = -Pe(1 - e^{-2s})e^{-s} \cos \theta;$$

$$r_1^\pm = 0,5(r_1 \pm |r_1|); \quad b_1^\pm = \frac{r_1^\pm}{e^{-s}}$$

для  $0 \leq i_1 \leq N-1$ ;  $1 \leq i_2 \leq M-1$  в направлении  $s$ .

Аналогичным образом аппроксимируются краевые условия. Для уравнения (18) эти условия таковы:

$$u_{i_1,0}^{j+1/2} = u_{i_1,1}^{j+1/2}, \quad u_{i_1,m-1}^{j+1/2} = u_{i_1,m}^{j+1/2}.$$

Краевые условия для уравнения (19) имеют вид:

$$\begin{aligned} \left(\frac{1}{h} + r_1\right)e^{-s_0+(h_1/2)} \frac{u_{1,i_2}^{j+1} - u_{0,i_2}^{j+1}}{h} = \\ = e^{-3s_0} \frac{u_{0,i_2}^{j-1} - u_{0,i_2}^j}{e} - fe^{-s_0}, \end{aligned}$$

Уравнения (18) и (19) решали методом прогонки. При расчетах использовали сетку, равномерную по  $s$  и  $\theta$ , с шагом по пространству  $h=0,1$ . Вблизи границ  $\theta=0$  и  $\theta=\pi$  шаг сетки выбирали равным  $h^2$ . Проверку программы осуществляли методом пробной функции и сравнением с аналитическим решением при  $Pe=0$ . Расчеты проводили на ЭВМ.

Описанная выше неявная конечно-разностная схема имеет существенное преимущество перед явными схемами, поскольку она устойчива для любых чисел Пекле и при любом соотношении между шагами во времени и по пространству. Устойчивость же явных схем достигается лишь при выполнении определенных условий, связывающих структуру сетки с параметрами исходных уравнений.

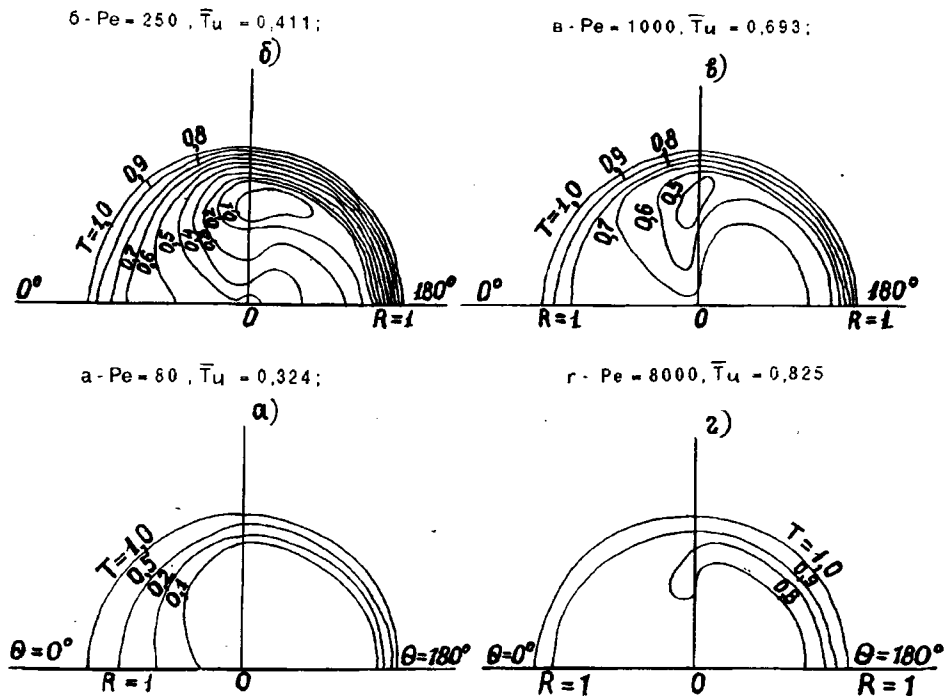


Рис. 2

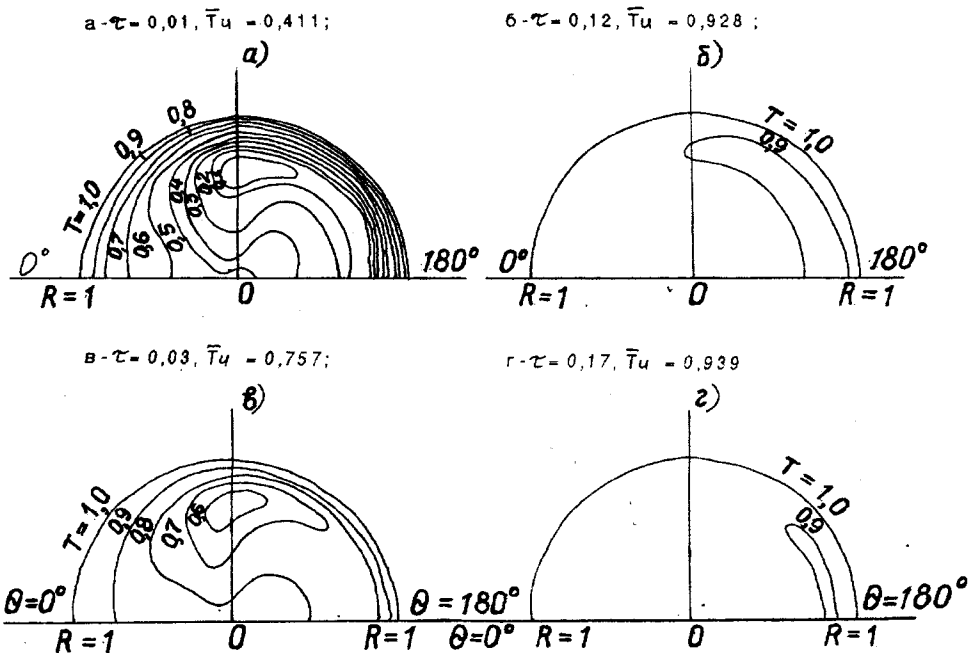


Рис. 3

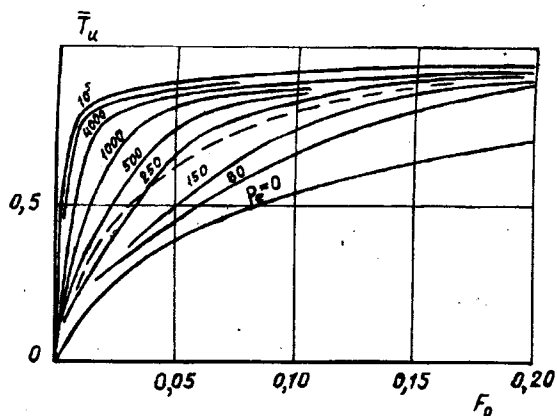


Рис. 4

В результате численного решения уравнения (7) получены распределения температур по объему пузырька для различных критериев Пекле и Фурье (рис. 2 – для фиксированного момента времени  $\tau=0,01$ , рис. 3 – со временем для  $Re=250$ ), зависимости средней безразмерной температуры газа от критерия Фурье (рис.4), а также зависимости полного значения критерия Нуссельта от критерия Пекле (рис. 5) и критерия Фурье (рис. 6, где 1- $Pe=0$ ; 2-20; 3-80; 4-250; 5-500; 6-1000; 7-4000; 8-8000; 9-10000; 10-15000; 11- $P=100000$ ).

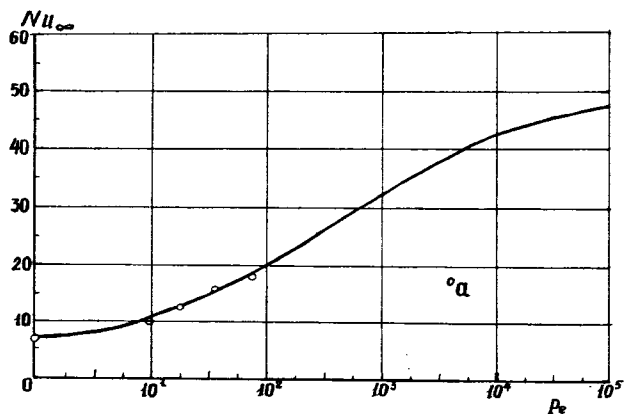


Рис. 5

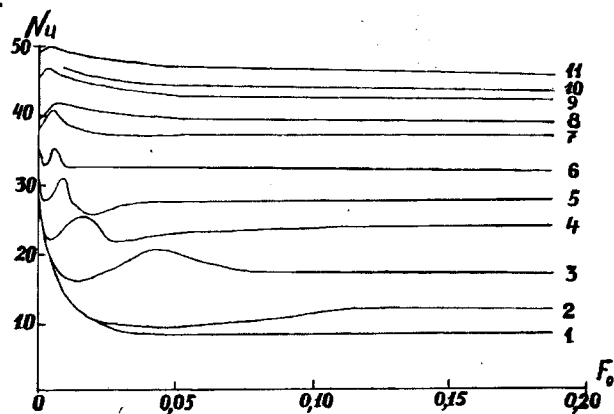


Рис. 6

Из приведенных рисунков видно, что полученные нами результаты хорошо совпадают с результатами работ [1,2] в интервале чисел Пекле от 0 до 80 как по зависимости средней температуры от времени, так и по локальному критерию Нуссельта.

Значения локального критерия Нуссельта, полученные ранее для критерия  $Re$ , больше 80, значительно меньше значений, полученных нами, и с ростом  $Re$  асимптотически приближаются к кривой, соответствующей модели Кронига-Бринка.

Из рис. 3 следует, что при  $Re > 80$  критерий  $Nu$  по результатам нашего решения продолжает возрастать с ростом  $Re$  и выходит на постоянное значение, равное примерно 50 при  $Re = 10^5$ .

Представленные результаты показывают, что при характерных для рассматриваемых вращающихся барботажных скрубберов числах Рейнольдса, равных  $10^2 - 10^3$ , средний критерий Нуссельта достигает 30...50, что свидетельствует об очень

высокой интенсивности теплообмена.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Горшенин П.А., Былинкин Б.С., Белов С.А. Основы теории вращающихся тепло- и массообменных барботажных аппаратов. М.: Легпромбыт-издат, 1991.
2. Heertjes P.M., de Nie L.H. Chem. Eng. Sei, 1966.
3. Popovich A.I. Henges I. Wärme und Stoffübertragung, 1971.
4. Милл-Томпсон А.М. Теоретическая гидродинамика. – М.: Энергоатомиздат, 1964.
5. Popovich A.I., Iervis R.E., Trass O. Chem. Eng. Sei, 1964.
6. Самарский А.А. Введение в теорию разных схем. – М.: Наука, 1971.
7. Сафонов А.И., Крылов В.С., Горшенин П.А. Исследование гидродинамики при диспергировании газа во вращающийся слой жидкости. – ТОХТ, 1973, т. 7, №3.

Рекомендована кафедрой теплотехники. Поступила 30.03.01.