УДК 677.022.66:058-2

КРУЧЕНИЕ ТЕКСТИЛЬНЫХ МАТЕРИАЛОВ НЕПОДВИЖНЫМИ КРУТИЛЬНЫМИ ОРГАНАМИ В ФОРМЕ КОСОГО ГЕЛИКОИДА

Г.И.ЧИСТОБОРОДОВ, Е.Н.НИКИФОРОВА, М. А.САКАЛОВ, К. А. АРУТЮНЯН, Л. А. СВЕШНИКОВА

(Ивановская государственная текстильная академия, ОАО «Глуховский текстиль»)

Ложная крутка, возникающая в продукте при его движении по поверхности неподвижного крутильного устройства, имеющего форму косого геликоида, связана с кручением кривых линий, с которыми совпадает ось волокнистого продукта. В [1] проведено математическое исследование рабочих поверхностей уплотнителей геликоидной формы, а также получены уравнения косого геликоида и его частных случаев – прямого и эвольвентного.

Настоящая работа посвящена изучению кривизны и геометрического кручения текстильного продукта, возникающих при его движении по криволинейной поверхности крутильного устройства.

Пусть поверхность S задана векторным уравнением [2]:

$$S: \bar{r}(u,v) = (x(u,v), y(u,v), z(u,v)). \quad (1)$$

Тогда $\bar{r} = \bar{r}(t)$ – кривизна поверхности S : $\bar{r} = \bar{r}(u, v)$, а

$$\bar{n} = \frac{\bar{r}_u \times \bar{r}_v}{|\bar{r}_u \times \bar{r}_v|} \quad (2)$$

– единичный вектор нормали к поверхности.

Геодезическая кривизна вычисляется по формуле

$$k_g = \frac{\bar{r}'_t,\ \bar{r}''_{tt},\ \bar{n}}{|\bar{r}'_t|^3}. \quad (3)$$

(В [3, с.118] эта формула дана с ошибкой.)

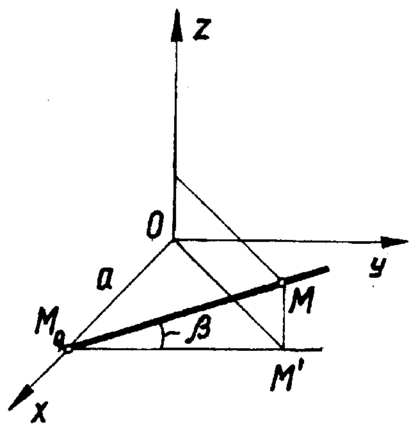

Рис. 1

Определим единичный вектор нормали к косому геликоиду (рис.1) [1, (6)]:

$$\bar{r} = \bar{r}(u,v) = (a\cos v -$$

$$- u\sin v,\ a\sin v + u\cos v,\ hv + u\,tg\beta), \quad (4)$$

где a – расстояние от образующей геликоида (прямой M_0M) до начала координат; t – длина отрезка M_0M образующей геликоида ($t = |M_0M|$); β – угол между образующей геликоида и плоскостью Oxy; h – приведенный шаг; v – угол поворота подвижной системы координат вокруг оси Oz; $u = t \cos\beta = |M_0M'|$ – расстояние от точки геликоида M до плоскости Oxz. Только для прямого геликоида u = t.

В результате геометрических вычислений и элементарных преобразований [4] получаем:

$$\bar{n} = \frac{\left((h - a\,tg\beta)\cos v + u\,tg\beta\,\sin v,\ (h - a tg\beta)\sin v - u\,tg\beta\cos v, u\right)}{\sqrt{u^2(1 + tg^2\beta) + (h - a\,tg\beta)^2}}. \qquad (5)$$

Рассмотрим на геликоиде (4) винтовую линию $u = u_0 = t_0 \cos\beta = const$. В качестве параметра t будет выступать параметр v:

$$\bar{r}(v) = (a\cos v - u_0 \sin v,\ a \sin v +$$

$$+ u_0 \cos v,\ hv + u_0\,tg\beta). \qquad (6)$$

Выражение для геодезической кривизны винтовой линии на геликоиде можно записать в виде

$$k_g = \frac{1}{\left|\bar{r}_v'\right|^3}\left(\bar{r}_v' \times \bar{r}_{vv}''\right)\bar{n}. \qquad (7)$$

Определив производные $\bar{r}_v'$, r_v'', $|\bar{r}_v'|^2$, $|\bar{r}_v'|^3$ [4], найдем векторное произведение:

$$\bar{r}_v' \times \bar{r}_{vv}'' = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ -a \sin v - u_0 \cos v & a \cos v - u_0 \sin v & h \\ -a \cos v + u_0 \sin v & -a \sin v - u_0 \cos v & 0 \end{vmatrix} =$$

$$= \bar{i}(ah\sin v + u_0 h\cos v) + \bar{j}(-ah\cos v + u_0 h\sin v) +$$

$$+ \bar{k}\left[(-a\sin v - u_0\cos v)^2 + (a\cos v - u_0 \sin v)^2\right];$$

$$\bar{r}_v' \times \bar{r}_{vv}'' = (ah\sin v + u_0 h\cos v,\ -ah\cos v + u_0 h\sin v,\ a^2 + u_0^2). \qquad (8)$$

В результате подстановки необходимых выражений в формулу (7) и после элементарных преобразований получим формулу для вычисления геодезической кривизны винтовой линии на геликоиде (4):

$$k_g = \frac{u_0}{\sqrt{(a^2 + h^2 + u_0^2)\left[u_0^2(1 + tg^2\beta) + (h - a tg\beta)^2\right]}}. \qquad (9)$$

В частности, для прямого геликоида (β=0):

$$k_g = \frac{u_0}{\sqrt{(a^2 + h^2 + u_0^2)(h^2 + u_0^2)}}. \qquad (10)$$

Кривая на поверхности называется геодезической, если ее геодезическая кривизна в каждой точке равна нулю. *Из (9) видно, что винтовые линии на геликоиде не являются геодезическими.* Исключением является винтовая линия с параметром u_0=0, *то есть линия пересечения геликоида* с цилиндром радиуса a и осью симметрии Oz.

Кручение пространственной кривой $\bar{r} = \bar{r}(t)$ вычисляется по формуле

$$\chi = \frac{(\bar{r}', \bar{r}'', \bar{r}''')}{(\bar{r}' \times \bar{r}'')^2}. \quad (11)$$

Найдем кручение винтовой линии (6), где в качестве параметра выступает v. Производные $\bar{r}'$ и $\bar{r}''$ известны [4]. Вычислим третью производную:

$$\bar{r}''' = (a \sin v + u_0 \cos v,$$

$$- a \cos v + u_0 \sin v,\ 0). \quad (12)$$

Векторное произведение $\bar{r}' \times \bar{r}''$ уже известно (формула (8)). Далее

$$(\bar{r}' \times \bar{r}'')^2 = (ah \sin v + u_0 h \cos v)^2 + (-ah \cos v + u_0 h \sin v)^2 + (a^2 + u_0{}^2)^2 =$$

$$= a^2 h^2 + u_0{}^2 h^2 + a^4 + 2a^2 u_0^2 + u_0{}^4;$$

$$(\bar{r}' \times \bar{r}'')^2 = (a^2 + u_0{}^2) h^2 + (a^2 + u_0{}^2)^2 = (a^2 + u_0{}^2)(h^2 + a^2 + u_0{}^2). \quad (13)$$

Найдем смешанное произведение:

$$\begin{aligned}(\bar{r}', \bar{r}'', \bar{r}''') &= (\bar{r}' \times \bar{r}'')\, \bar{r}''' = (ah \sin v + u_0 h \cos v)(a \sin v + u_0 \cos v) + \\ &+ (-ah \cos v + u_0 h \sin v)(-a \cos v + u_0 \sin v) = h(a^2 + u_0{}^2).\end{aligned} \quad (14)$$

Подставляя (14) и (13) в (11), получаем формулу для геометрического кручения винтовой линии (6), с которой совпадает ось волокнистого продукта:

$$\chi = \frac{h}{h^2 + a^2 + u_0{}^2} =$$

$$= \frac{h}{h^2 + a^2 + (t_0 \cos\beta)^2}. \quad (15)$$

Таким образом, имеем математическую зависимость, связывающую геометрические параметры крутильного устройства в форме косого геликоида с величиной кручения, возникающего в текстильном продукте при движении по устройству.

Следовательно, ложная крутка продукта, вызванная его геометрическим кручением, определяется по формуле

$$K = \frac{\chi}{2\pi} = \frac{1}{2\pi} \frac{h}{h^2 + a^2 + (t_0 \cos\beta)^2}. \quad (16)$$

ВЫВОДЫ

1. Получена математическая модель процесса кручения текстильного материала при его движении через класс уплотнителей в форме косого геликоида.

2. Результаты исследований рекомендуются для выбора оптимальных конструктивных параметров крутильных устройств геликоидной формы.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Чистобородов Г.И. и др.* // Вестник Ивановской государственной текстильной академии. – Иваново, ИГТА, 2000.

2. *Чистобородов Г.И. и др.* Математическое моделирование рабочих поверхностей крутильных органов. Деп. в ООО «Легпроминформ» 04.12.00, № 3968-ЛП.

3. *Позняк Э.Г., Шикин Е.В.* Дифференциальная геометрия: Первое знакомство. – М.: МГУ, 1990.

4. *Чистобородов Г.И. и др.* Кручение текстильных материалов неподвижными крутильными органами. Деп. в ООО «Легпроминформ» 04.12.00, № 3967-ЛП.

Рекомендована кафедрой начертательной геометрии и черчения ИГТА. Поступила 01.03.01.