

УДК 677.022.954/955

**О ВЛИЯНИИ ФОРМЫ ПОВЕРХНОСТИ
НА НАТЯЖЕНИЕ НИТИ**

*Г.И. ЧИСТОБОРОДОВ, Е.Н. НИКИФОРОВА, М. А. САКАЛОВ,
К. А. АРУТЮНЯН, Л. А. СВЕШНИКОВА*

(Ивановская государственная текстильная академия,
ОАО «Глуховский текстиль»)

При изучении технологических процессов прядильного производства в ряде случаев приходится определять натяжение нити, располагающейся на направляющей поверхности по пространственной кривой. В настоящем исследовании рассматривается натяжение нити геодезической формы при ее скольжении по поверхности любой кривизны и приводятся частные решения задачи натяжения нити при скольжении по поверхностям в форме катеноида и псевдосферы.

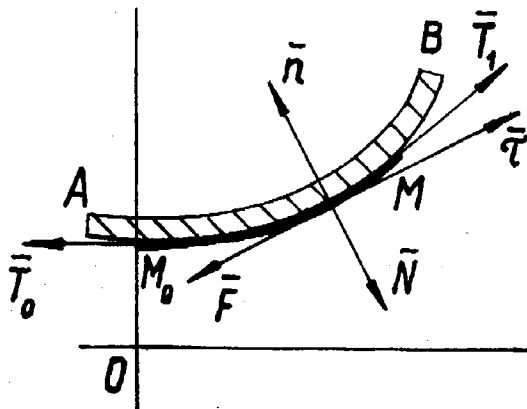


Рис. 1

Пусть нить располагается на поверхности вращения по дуге M_0M (рис.1), где AB – некоторое меридиональное сечение поверхности, и находится в равновесии под действием распределенной силы с напряженностью F и натяжений T на концах нити. Уравнения равновесия нити в лагранжевых координатах имеют вид [1, 2]:

$$\left. \begin{aligned} \frac{1}{\mu} \frac{dT}{ds} + F_\tau &= 0, \\ \frac{1}{\mu} \frac{T}{\varrho} + F_n &= 0, \\ F_b &= 0, \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

где F_τ, F_n, F_b – проекции напряженности силы F на касательную, нормаль и бинормаль; ds – элемент длины нити; μ – линейная плотность продукта; ϱ – радиус кривизны элемента нити.

Из (1) видно, что действующая в каждой точке нити сила поля F целиком рас-

Разделив переменные

$$\frac{dT}{T} = f k(s) ds$$

и проинтегрировав обе части полученного равенства от точки M_0 ($s = 0$) до произвольной точки M с координатой s , получим

$$T = C \exp\left(f \int_0^s k(s) ds\right), \quad (3)$$

где $C = \text{const}$.

В точке M_0 $s = 0$ и $T = T_0$. Тогда $C = T_0$ и (3) записывается в виде

$$T = T_0 \exp\left(f \int_0^s k(s) ds\right). \quad (4)$$

Полученное равенство позволяет определить натяжение в любом сечении нити, находящейся на грани равновесия, при ее скольжении по поверхности.

Решим теперь несколько частных задач по определению натяжения нити. Рассмотрим натяжение нити при скольжении по воронке в форме катеноида.

Катеноид есть поверхность, полученная при вращении цепной линии относительно прямой. Осевое сечение воронки имеет вид цепной линии (в декартовых координатах):

$$y = a \operatorname{ch} \frac{x}{a}. \quad (5)$$

Для цепной линии проекция ординаты произвольной точки на нормаль является величиной постоянной, равной параметру a цепной линии (рис.2):

$$y \cos \alpha = a.$$

полагается в соприкасающейся плоскости. Нить находится под действием двух сил T_0 и T_1 , приложенных в точках M_0 и M . Будем считать, что другие активные силы отсутствуют. При скольжении по поверхности нить располагается по геодезической (кратчайшей) кривой. Тогда сила трения F направлена по касательной к нити и находится на пороге срыва, то есть сила трения максимальна во всех точках и подчиняется закону Амонтона:

$$F = f N,$$

где F и N – напряженности сил трения и нормальной реакции; f – коэффициент трения.

Поскольку $T_1 > T_0$, трение направлено в сторону, противоположную положительному направлению касательной. Проекция напряженности силы на касательную τ

$$F_\tau = -f N.$$

Проекция напряженности силы на главную нормаль n :

$$F_n = -N.$$

Вследствие того, что нить располагается по геодезической линии, кривизну k ($k=1/\rho$) нити в каждой точке задаем через натуральный параметр (длину s дуги меридиана) как $k = k(s)$.

Уравнения равновесия нити (1) для рассматриваемого случая примут вид:

$$\left. \begin{aligned} \frac{1}{\mu} \frac{dT}{ds} &= -F_\tau = fN, \\ \frac{1}{\mu} T k(s) &= -F_n = N. \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

Разделив первое уравнение из (2) на второе, получим выражение для определения натяжения нити:

$$\frac{dT}{ds} \frac{1}{T k(s)} = f.$$

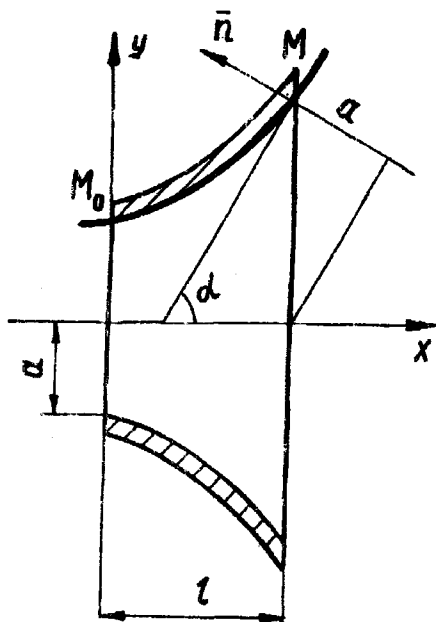


Рис. 2

Кривизна цепной линии определена согласно [3]:

$$k = \frac{\frac{1}{a} \operatorname{ch} \frac{x}{a}}{\left(1 + \operatorname{sh}^2 \frac{x}{a}\right)^{3/2}} = \frac{1}{a \operatorname{ch}^2 \frac{x}{a}} = \frac{a}{y^2}. \quad (6)$$

Длина s дуги M_0M цепной линии от ее вершины M_0 $(0, a)$ до произвольной точки $M(x, y)$ равна:

$$s = \int_0^x \sqrt{1 + y'^2} dx = \quad (7)$$

$$= \int_0^x \operatorname{ch} \frac{x}{a} dx = a \operatorname{sh} \frac{x}{a} = \sqrt{y^2 - a^2}.$$

Решая совместно (6) и (7), а также исключив y , находим натуральное уравнение цепной линии [4], то есть кривизну k цепной линии выразим через длину s дуги меридиана:

$$k(s) = \frac{a}{s^2 + a^2} = \frac{1}{\frac{s^2}{a} + a}. \quad (8)$$

Поскольку нить скользит по поверхности воронки и расположена в меридиональной плоскости (по геодезической кривой), натяжение нити определим по формуле (4). Найдем значение интеграла для цепной линии:

$$\int_{s_1}^{s_2} k(s) ds = \operatorname{arctg} \frac{s_2}{a} - \operatorname{arctg} \frac{s_1}{a}.$$

Принимая за начало отсчета точку M_0 (в точке M_0 координата $s_1 = 0$), имеем

$$\int_0^{s_2} k(s) ds = \operatorname{arctg} \frac{s_2}{a}, \quad (9)$$

где $s_2 = \sqrt{y_M^2 + a^2}$; $y_M = a \operatorname{ch} \frac{l}{a}$; l — проекция длины s дуги меридиана на ось Ox (длина воронки).

Таким образом, натяжение нити при скольжении по воронке с меридиональным сечением в форме цепной линии составит

$$T = T_0 \exp\left(f \operatorname{arctg} \frac{s_2}{a}\right) \quad (10)$$

или

$$T = T_0 \exp\left(f \operatorname{arctg} \sqrt{\operatorname{ch}^2 \frac{l}{a} - 1}\right). \quad (11)$$

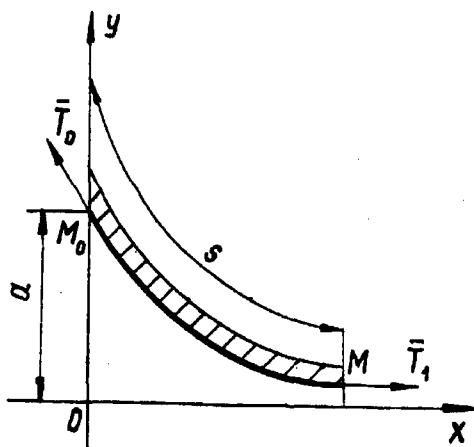


Рис. 3

Интересным является вопрос о натяжении нити, огибающей участок поверхности, имеющей форму псевдосферы. Псевдосфера – это поверхность, получаемая вращением трактрисы вокруг ее асимптоты. Если на поверхности псевдосферы нить скользит по геодезической кривой (например, по осевому сечению воронки), то тогда натяжение нити на участке M_0M (рис.3) определяется по формуле (4).

В [5] нами получено натуральное уравнение трактрисы:

$$k(s) = \frac{1}{a \sqrt{e^{\frac{2s}{a}} - 1}}, \quad (12)$$

где $a = \text{const}$ – отрезок касательной от точки касания до некоторой прямой; s – длина дуги трактрисы (длина нити на поверхности воронки).

Натяжение нити на дуге M_0M направителя с меридиональным сечением в форме трактрисы с учетом (4) и (12) составит

$$T = T_0 \exp \left(f \operatorname{arctg} \sqrt{e^{\frac{2s_2}{a}} - 1} \right). \quad (13)$$

1. Для нити, скользящей на направляющей поверхности любой кривизны по геодезической кривой выявлена зависимость натяжения от ее формы (кривизны нити, выраженной через натуральный параметр – длину дуги).

2. Получены уравнения (10) и (13) для определения натяжения нити при ее скольжении по поверхностям воронок в форме катеноида и псевдосферы, являющиеся частным случаем равенства (4).

ЛИТЕРАТУРА

1. Якубовский Ю.В., Живов В.С., Коритынский Я.И., Мигушов И.И. Основы механики нити. – М.: Легкая индустрия, 1973.
2. Мигушов И.И. Механика текстильной нити и ткани. – М.: Легкая индустрия, 1980.
3. Позняк Э.Г., Шикин Е.В. Дифференциальная геометрия: Первое знакомство. – М.: МГУ, 1990.
4. Чистобородов Г.И. и др. Натяжение нити, скользящей по поверхности воронки в форме катеноида. – Деп. в ООО «Легпроминформ» 23.04.2001, № 3998-ЛП.
5. Чистобородов Г.И. и др. Натяжение нити, скользящей по поверхности в форме псевдосферы. – Деп. в ООО «Легпроминформ» 23.04.2001, № 3999-ЛП.

Рекомендована кафедрой начертательной геометрии и черчения. Поступила 31.05.01.