№ 5 (263) ТЕХНОЛОГИЯ ТЕКСТИЛЬНОЙ ПРОМЫШЛЕННОСТИ 2001

УДК 677.022.66

НАТЯЖЕНИЕ НИТИ, ДВИЖУЩЕЙСЯ ПО ГЕЛИСЕ

В.Г. ЛАПШИН, Е.Г. ВАВИЛОВ, Г.И. ЧИСТОБОРОДОВ, Е.Н. НИКИФОРОВА

(Ивановская государственная текстильная академия)

В [1] нами получена формула для определения натяжения T нити при ее скольжении по поверхности любой формы:

$$T = T_0 \exp\left(f \int_0^s k(s)\, ds \right), \qquad (1)$$

где T_0 – натяжение на ведомом конце нити; f – коэффициент трения; ds – элемент длины нити; k = k (s) – кривизна нити в каждой точке, заданная через натуральный параметр (длину s дуги).

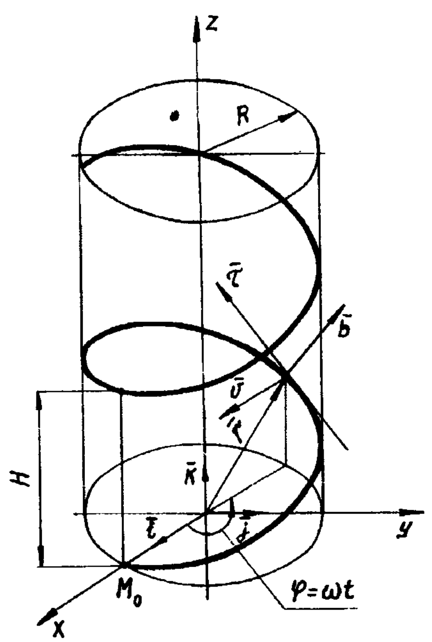

Рис. 1

Применим формулу (1) для решения частной задачи. Пусть гибкая нерастяжимая нить движется по цилиндрической винтовой линии – гелисе (рис.1). Получим зависимость натяжения нити от параметров винтовой линии на круглой цилиндрической поверхности.

Векторное уравнение кривой будет

$$r(t) = i\, R\cos\varphi + j\, R\sin\varphi + k\, h\, \varphi, \qquad (2)$$

где i, j, k – орты координатных осей Ox, Oy, Oz соответственно; R – радиус цилиндра; φ – угол поворота; h = H/2π – приведенный шаг, то есть перемещение точки M нити параллельно оси Oz при повороте на один радиан; H – шаг винтовой линии.

В параметрическом виде винтовая линия описывается уравнениями

$$x = R\cos t; \quad y = R\sin t;$$

$$z = ht \quad \text{или} \quad z = h\varphi, \qquad (3)$$

где t – параметр (t = φ – центральный угол проекции отрезка нити на плоскость поперечного сечения цилиндра).

Найдем единичный вектор касательной τ к кривой:

$$\tau = \frac{r'}{|r'|}.$$

Координаты единичного вектора определяют направляющие косинусы касательной:

$$\frac{x'}{|r'|} = \cos\alpha,\ \frac{y'}{|r'|} = \cos\beta,\ \frac{z'}{|r'|} = \cos\gamma, \qquad (4)$$

где α, β, γ – углы касательного вектора r' с осями координат.

Касательный вектор в точке М винтовой линии

$$r'(t) = \frac{dr}{dt}.$$

Координаты касательного вектора – $x'(t)$, $y'(t)$, $z'(t)$:

$$r' = -R\sin t\, i + R\cos t\ j + h\, k.$$

Модуль касательного вектора

$$|r'| = \sqrt{x'^2 + y'^2 + z'^2},$$

$$|r'| = \sqrt{(-R\sin t)^2 + (R\cos t)^2 + h^2} =$$

$$= \sqrt{R^2(\sin^2 t + \cos^2 t) + h^2} = \sqrt{R^2 + h^2}.$$

Единичный касательный вектор

$$\tau\left(\frac{-R}{\sqrt{R^2 + h^2}}\sin t,\quad \frac{R}{\sqrt{R^2 + h^2}}\cos t,\quad \frac{h}{\sqrt{R^2 + h^2}}\right). \qquad (5)$$

Постоянная третья координата выражает следующее: винтовая линия пересекает все образующие цилиндра под одним (постоянным) углом.

Длина s дуги винтовой линии от точки M_0 ($t_0 = 0$, $s = 0$) до точки M (t)

$$s = \int_{t_0}^{t}\sqrt{x'^2 + y'^2 + z'^2}\,dt =$$

$$= \int_0^t \sqrt{R^2 + h^2}\ dt = t\sqrt{R^2 + h^2} \qquad (6)$$

или

$$s = \varphi\sqrt{R^2 + h^2}. \qquad (7)$$

Кривизна винтовой линии

$$k = \left|\frac{d^2 r}{ds^2}\right| = \frac{R}{R^2 + h^2} = \mathrm{const}. \qquad (8)$$

Поскольку кривизна винтовой линии есть величина постоянная, то согласно (1) натяжение нити на поверхности цилиндра

$$T = T_0\, e^{f k s}. \qquad (9)$$

Подставив выражения (7) и (8) в (9), получим

$$T = T_0 \exp(f k \varphi\sqrt{R^2 + h^2}) =$$

$$= T_0 \exp\left(f\varphi\frac{R}{\sqrt{R^2 + h^2}}\right). \qquad (10)$$

Учитывая уравнение единичного вектора касательной (5)

$$\frac{R}{\sqrt{R^2 + h^2}} = \cos\alpha, \qquad (11)$$

где α – угол подъема винтовой линии, формулу (10) перепишем в виде

$$T = T_0 \exp(f \varphi \cos\alpha). \qquad (12)$$

Покажем, что полученная зависимость (12) после необходимых преобразований соответствует известным формулам из [2] для определения натяжения нити на цилиндре.

Так как

$$\varphi = \frac{s}{\sqrt{R^2 + h^2}} = \frac{s\,R}{\sqrt{R^2 + h^2}\;R} =$$

$$= \frac{s}{R} \cos\alpha = \frac{l}{R} \cos\alpha,$$

где $l = s = s(\varphi)$ – длина отрезка винтовой линии, натяжение T нити, огибающей поверхность круглого цилиндра по винтовой линии:

$$T = T_0 \exp\left(f \frac{l}{R} \cos^2\alpha\right). \qquad (13)$$

Уравнение (13) полностью согласуется с формулой Минакова, что свидетельствует о справедливости и универсальности предложенной формулы (1) для определения натяжения нити при скольжении по поверхности любой формы и целесообразности ее применения при решении частных задач.

ВЫВОДЫ

1. Доказана универсальность формулы для определения натяжения нити, скользящей по поверхности любой формы.

2. Получены формулы для определения натяжения нити, движущейся по гелисе, от различных параметров (длины винтовой линии, угла поворота, шага, угла подъема витков, коэффициента трения).

ЛИТЕРАТУРА

1. *Чистобородов Г.И. и др.* Определение натяжения нити, скользящей по поверхности. – Деп. в ООО «Легпроминформ» 23.04.2001, №3997-ЛП.

2. *Минаков А.П.* // Текстильная промышленность. – 1944, № 10.

Рекомендована кафедрой начертательной геометрии и черчения. Поступила 31.05.01.