

УДК 621.34: 62-50

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ПРОЦЕССА ФОРМИРОВАНИЯ РУЛОНА ТКАНИ В СИСТЕМЕ УПРАВЛЕНИЯ НАМОТКОЙ

В. Ф. ГЛАЗУНОВ, М. С. КУЛЕНКО, В. Ф. СИДЯКИН

(Ивановский государственный энергетический университет)

Микропроцессорная реализация управления параметрами намотки ткани в рулон обуславливает необходимость совершенствования известных математических моделей этого процесса [1...4] и прежде всего в направлении их структурной организации и простоты вычислительных процедур.

Процесс формирования рулона ткани отличается от намотки бумаги, пленки, нити главным образом параметрами и структурой наматываемого материала, а именно: неоднородностью структуры полотна, обусловленной как свойствами нитей, так и их переплетением; неоднозначностью в определении толщины материала; слабой зависимостью между тангенциальными и радиальными деформациями ткани в намотанном рулоне; релаксационными свойствами материала; имеются существенные различия по степени деформации, значениям действующих в рулоне усилий.

При разработке математической модели процесса формирования рулона примем следующие допущения: а) оправка абсолютно жесткая, недеформируемая; б) растяжение-сжатие ткани подчиняется закону Гука; в) отсутствуют тангенциальные перемещения слоев в рулоне; г) отсутствуют

силы трения при взаимном перемещении слоев в рулоне; д) отсутствует эксцентриситет рулона и он имеет идеальную цилиндрическую форму; е) давление периферического витка полностью передается на оправку и равномерно распределено по периметру витка.

В основу формирования математической модели рулона положим алгоритм последовательного по мере наложения витков расчета деформаций материала в рулоне и его параметров. Считаем заданными исходные параметры намотки: F_0 – натяжение ткани на входе в рулон, Н; E_{τ}' – приведенный к ширине тангенциальный модуль упругости, Н; $E_{\tau}' = F_0 / \varepsilon_0$; ε_0 – начальное относительное удлинение в тангенциальном направлении; $E_{\tau} = F_0 / (d_0 \varepsilon_0 B)$ – тангенциальный модуль упругости, Па; d_0 – толщина материала при относительном удлинении ε_0 , м; B – ширина полотна, м; $E_r = E_{\tau} / k^2$ – радиальный модуль упругости, Па; k – коэффициент, характеризующий соотношение модулей упругости или коэффициентов Пуассона на сжа-

тие-растяжение в ортогональных направлениях [3]:

$$k = \sqrt{\frac{E_\tau}{E_r}} = \sqrt{\frac{\mu_{tr}}{\mu_{rt}}},$$

где μ_{tr} – коэффициент Пуассона, характеризующий сжатие в направлении r при растяжении в направлении t ; μ_{rt} – коэффициент Пуассона, характеризующий сжатие в направлении t при растяжении в на-

правлении r . Для ортотропного тела с цилиндрической анизотропией обобщенный закон Гука имеет вид [3]:

$$\varepsilon_r = \frac{q_r}{E_r} - \mu_{tr} \frac{q_t}{E_t};$$

$$\varepsilon_t = \frac{q_t}{E_t} - \mu_{rt} \frac{q_r}{E_r},$$

где q_r и q_t – радиальное и окружное напряжение ткани в рулоне.

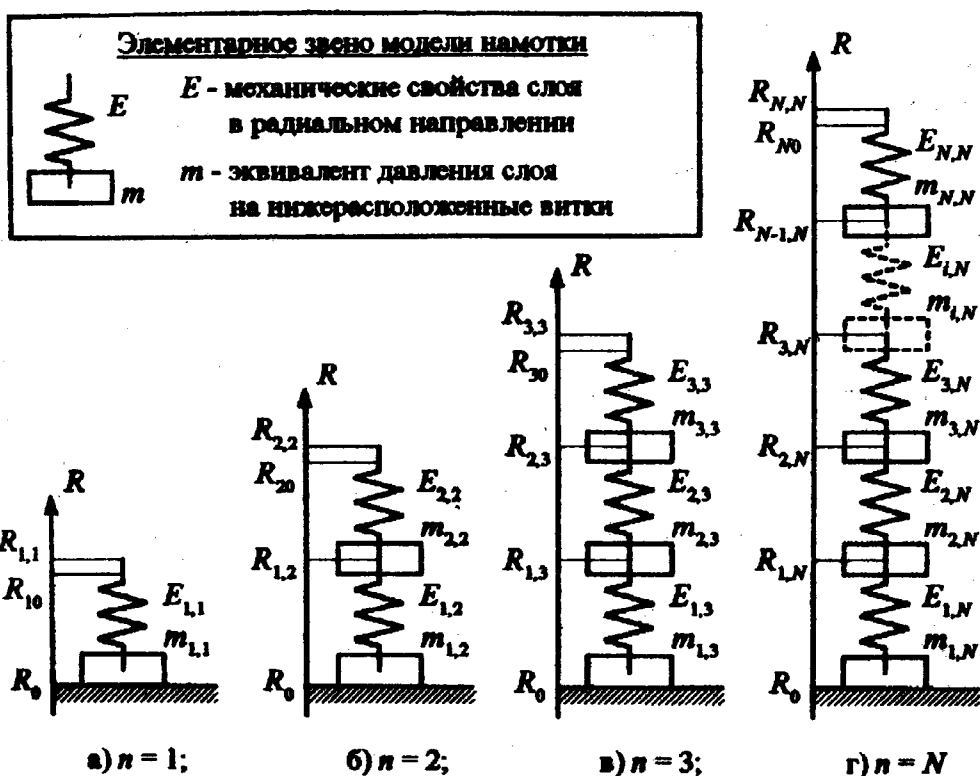


Рис. 1

Для расчета параметров математической модели процесса намотки воспользуемся механической аналогией, представив формируемый рулон как соединение элементарных упругостей и масс (рис.1). Здесь масса отражает давление витка на нижерасположенные слои, а упругость – деформационные свойства витка в ради-

альном направлении. Деформация цепочки последовательно соединенных масс и упругостей по законам теоретической механики представляется системой линейных уравнений порядка n , где n – текущее число слоев. При этом в отличие от классической постановки задачи определения равновесного состояния системы грузов, подве-

шенных на упругих элементах, здесь введем условие переменности величин перемещающихся масс и их зависимости от координат соответствующих элементов. Таким образом, система уравнений становится нелинейной и встает вопрос о сходимости решения в условиях накладываемых дополнительно в процессе намотки ограничений. Подтвердим изложенное математическими выкладками.

Давление витка полотна радиусом R на нижерасположенные слои при $R \geq R_{\text{крит}}$

$$q = \frac{F}{RB} = \frac{2\pi RE_{\tau} - L_0 E_{\tau}}{RBL_0} = \frac{E_{\tau}}{B} \left(\frac{1}{R_{\text{крит}}} - \frac{1}{R} \right),$$

где B – ширина полотна, м; $R_{\text{крит}}$ – критический радиус витка, то есть радиус, где относительное удлинение ткани становится равным 0.

Тогда давление, создаваемое i -м витком

$$q_i = \frac{E_{\tau}}{B} \left(\frac{1}{R_{\text{крит } i-1}} - \frac{1}{R_{i-1}} \right).$$

Составим уравнения равновесия механической системы (рис.1) применительно к математической модели намотки.

При намотке первого витка на абсолютно жесткую оправку (рис.1-а) радиальная деформация отсутствует. Тогда $R_{1,1} = R_0 + d_0$, где $R_{1,1}$ – радиус 1-го витка после его намотки; d_0 – толщина материала при относительном удлинении ε_{10} на входе в рулон; R_0 – радиус оправки.

Далее будем придерживаться такой же системы обозначений: запись $R_{k,n}$ означает радиус k -го витка после намотки n -го витка. Длина 1-го витка $L_{1,1} = 2\pi R_0$, принимаем $L_{1,n} = \text{const}$ на всем протяжении намотки. Давление q_1 , оказываемое первым витком на оправку, постоянно, поскольку 1-й виток лишен возможности перемещения в радиальном направлении:

$$q_1 = q_{1,1} = \frac{E_{\tau}}{B} \left(\frac{1}{R_{10}} - \frac{1}{R_0} \right),$$

где $R_{10} = R_{\text{крит}} = R_0 / (1 + \varepsilon_{10})$.

Наложение второго витка приводит к радиальной деформации 1-го витка. Его радиус становится равным $R_{1,2}$ и, если $q_1 = q_{1,2} = q_{1,1} = \text{const}$, то давление $q_{2,2}$, оказываемое 2-м витком, по мере изменения $R_{1,2}$ уменьшается. Равновесное состояние такой системы в соответствии с механическим аналогом представляется уравнением

$$E_{r1}(R_{1d} - R_{1,2}) = q_2 d_0, \quad (1)$$

где $R_{1d} = R_{1,1}$ – радиус слоя, измеряемый после его наложения на поверхность рулона, или "теоретический" радиус [4].

Это следует из того, что на линейном участке кривой деформации имеем соотношение между величиной напряжений и относительного удлинения (сжатия):

$$E_r \varepsilon = q, \quad \text{где } \varepsilon = \frac{d_0 - d}{d_0} = \frac{R_H - R_K}{d_0}.$$

Давление, оказываемое вторым витком,

$$q_2 = q_{2,2} = \frac{E_{\tau}}{B} \left(\frac{1}{R_{20}} - \frac{1}{R_{1,2}} \right),$$

где $R_{20} = R_{1,1} / (1 + \varepsilon_{20})$, а в качестве начального приближения $R_{1,2}$ берем величину $R_{1,1}$.

В этом случае уравнение (1) имеет вид

$$E_{r1}(R_{1d} - R_{1,2}) = \frac{E_{\tau} d_0}{B} \left(\frac{1}{R_{20}} - \frac{1}{R_{1,2}} \right).$$

Обозначим $b = E_{\tau} d_0 / B$. Тогда равновесное состояние системы из двух витков запишется с помощью выражения

$$E_{r1} R_{1,2}^2 - \left(E_{r1} R_{1d} - \frac{b}{R_{20}} \right) R_{1,2} - b = 0. \quad (2)$$

Решая (2), получаем значение радиуса первого слоя после его деформации за счет наложения второго слоя $R_{1,2}$ и далее находим следующие величины: $R_{2,2} = R_{1,2} + d_0$; $R_{2d} = R_{2,2}$; $R_{1n} = R_{1,2}$. Здесь индексом n обозначен радиус $(i-1)$ -го слоя, величину ко-

того необходимо знать для определения деформации i -го слоя при наложении на рулон последующих ($n > i$) слоев.

Наложение 3-го витка приводит к радиальной деформации 1-го и 2-го витков, что

$$\begin{cases} E_{r1}(R_{1d} - R_{1,3}) - E_{r2}(R_{2d} - R_{2,3} - (R_{1n} - R_{1,3})) = q_2 d_0, \\ E_{r2}(R_{2d} - R_{2,3} - (R_{1n} - R_{1,3})) = q_3 d_0. \end{cases} \quad (3)$$

Здесь $q_2 = \frac{b}{d_0} \left(\frac{1}{R_{20}} - \frac{1}{R_{1,3}} \right)$, $q_3 = \frac{b}{d_0} \cdot \left(\frac{1}{R_{30}} - \frac{1}{R_{2,3}} \right)$, $R_{30} = \frac{R_{2,2}}{1 + \epsilon_{30}}$; начальные приближения: $R_{1,3} = R_{1,2}$; $R_{2,3} = R_{2,2}$.

Решая систему (3), получаем величины $R_{1,3}$ и $R_{2,3}$ и находим $R_{3,3} = R_{2,3} + d_0$; $R_{3d} = R_{3,3}$; $R_{2n} = R_{2,3}$.

При наложении k витков ($n = k$) имеем общий вид системы уравнений, описывающей равновесное состояние рулона:

$$\begin{cases} E_{r1}(R_{1d} - R_{1,k}) - E_{r2}(R_{2d} - R_{2,k} - (R_{1n} - R_{1,k})) = q_2 d_0, \\ \dots \\ E_{r(i-1)}(R_{(i-1)d} - R_{i-1,k} - (R_{(i-2)n} - R_{i-2,k})) - E_{ri}(R_{id} - R_{i,k} - (R_{(i-1)n} - R_{i-1,k})) = q_i d_0, \\ \dots \\ E_{r(k-1)}(R_{(k-1)d} - R_{k-1,k} - (R_{(k-2)n} - R_{k-2,k})) = q_k d_0. \end{cases} \quad (4)$$

$q_2 = \frac{b}{d_0} \left(\frac{1}{R_{20}} - \frac{1}{R_{1,k}} \right)$, $q_i = \frac{b}{d_0} \cdot \left(\frac{1}{R_{i0}} - \frac{1}{R_{i-1,k}} \right)$, $q_k = \frac{b}{d_0} \left(\frac{1}{R_{k0}} - \frac{1}{R_{k-1,k}} \right)$, $R_{k0} = \frac{R_{k-1,k-1}}{1 + \epsilon_{k0}}$, начальные приближения:

$R_{1,k} = R_{1,k-1}$; $R_{2,k} = R_{2,k-1}$; $R_{i-2,k} = R_{i-2,k-1}$; $R_{i-1,k} = R_{i-1,k-1}$; $R_{i,k} = R_{i,k-1}$; $R_{k-2,k} = R_{k-2,k-1}$; $R_{k-1,k} = R_{k-1,k-1}$.

Решая систему (4), получаем значения $R_{1,k}$, $R_{2,k}, \dots, R_{i,k}, \dots, R_{k-1,k}$ и находим $R_{k,k} = R_{k-1,k} + d_0$; $R_{kd} = R_{k,k}$; $R_{(k-1)n} = R_{k-1,k}$.

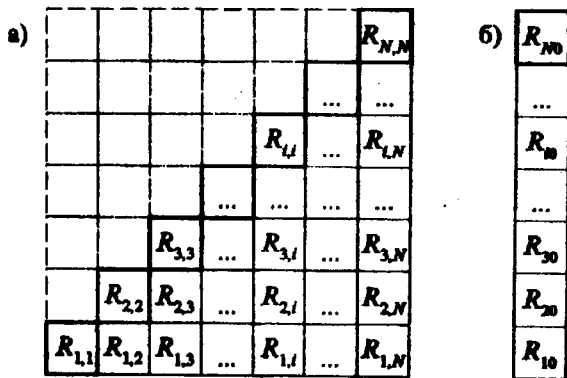


Рис. 2

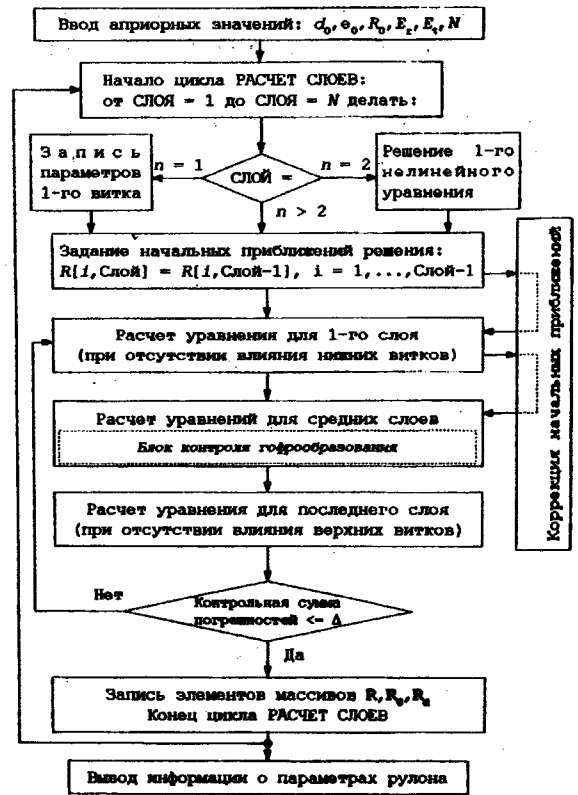


Рис. 3

В результате последовательного решения систем уравнений, соответствующих равновесному состоянию рулона, при намотке каждого слоя формируем массивы данных $R_{i,j}$ и R_{i0} (рис.2, где а)–массив текущих координат слоев; б)–массив критических радиусов), используя которые можно с учетом принятых допущений судить о происходящих в рулоне процессах деформации, в частности, об изменении давления на оправку, распределении межслойных давлений, относительном удлинении слоев в рулоне в ходе и по окончании намотки. Блок-схема алгоритма решения такой задачи представлена на рис.3.

Специфическим отличием системы (4) является ее большой порядок, увеличивающийся по мере намотки каждого оче-

редного слоя. Кроме того, коэффициенты при неизвестных имеют большую, по сравнению с корнями системы, величину, превышая их на несколько порядков. Все это накладывает ограничения в зависимости от метода решения на количество и точность вычислений. Анализ существующих методов решения систем нелинейных уравнений показал, что в данной задаче наиболее целесообразно использовать метод Гаусса–Зейделя для нестандартных функций с коррекцией начальных приближений в ходе итерационного процесса. Преобразование приведенной к нормальной форме системы (4) позволяет представить ее в виде $f(x)=F(x)-\Phi(x)=0$, где функция $F(x)$ имеет особо простое строение. Тогда

$$\left\{ \begin{array}{l} (E_{r1} + E_{r2})R_{1,k}^2 - (E_{r1}R_{1d} - E_{r2}R_{2d} + E_{r2}R_{1n} - b/R_{20})R_{1,k} - E_{r2}R_{2,k}R_{1,k} - b = 0, \\ \dots \\ (E_{r(i-1)} + E_{ri})R_{i-1,k}^2 - (E_{r(i-1)}(R_{(i-1)d} - R_{(i-2)n}) - E_{ri}(R_{id} - R_{(i-1)n}) - b/R_{i0})R_{i-1,k} - \\ - E_{r(i-1)}R_{i-1,k}R_{i-2,k} - E_{ri}R_{i-1,k}R_{i,k} - b = 0, \\ \dots \\ E_{r(k-1)}R_{k-1,k}^2 - (E_{r(k-1)}(R_{(k-1)d} - R_{(k-2)n}) - b/R_{k0})R_{k-1,k} - E_{r(k-1)}R_{k-1,k}R_{k-2,k} - b = 0. \end{array} \right.$$

В качестве $F(x)$ целесообразно выбрать квадратичную функцию неизвестной переменной. Последовательное решение методом Гаусса-Зейделя N таких систем даст информацию о закономерностях происходящих в ходе формирования рулона процессов. Поскольку за $F(x)$ выбрана быстро изменяющаяся часть $f(x)$, то полагаем, что будет обеспечиваться высокая скорость сходимости итераций.

Необходимо отметить, что вид системы (4) может существенно измениться при появлении участков рулона с нулевым натяжением слоев (гофр). Гофр появляется при достижении радиусом $(i-1)$ -го слоя в намотке из k витков $R_{i-1,k}$ величины критического радиуса слоя R_{i0} , вычисляемой при наложении витка на поверхность рулона с входным относительным удлинением $\epsilon_{0(i-1)}$. Если при этом не принять никаких мер, то математическое описание рулона будет неверно отображать процесс намотки, поскольку в этом случае q_i станет

меньше 0, что лишено физического смысла. Поэтому в момент выполнения условия $R_{i-1,k} \leq R_{i0}$ уравнение в системе (4), описывающее поведение этого слоя, должно модифицироваться в линейное уравнение:

$$\begin{aligned} E_{r(i-1)}(R_{(i-1)d} - R_{i-1,k} - (R_{(i-2)n} - R_{i-2,k})) - \\ - E_{ri}(R_{id} - R_{i,k} - (R_{(i-1)n} - R_{i-1,k})) = 0, \end{aligned}$$

в результате решения которого находится неизвестная величина $R_{i-1,k}$.

Таким образом, в алгоритм вычисления параметров модели намотки вводится блок расчета гофрированных слоев (рис.3). Принимаем давление гофрированного слоя равным 0, а относительное удлинение слоя допускаем меньше 0, что будет отражать переход излишка материала слоя в изменение занимаемого им объема и деформационных характеристик слоя.

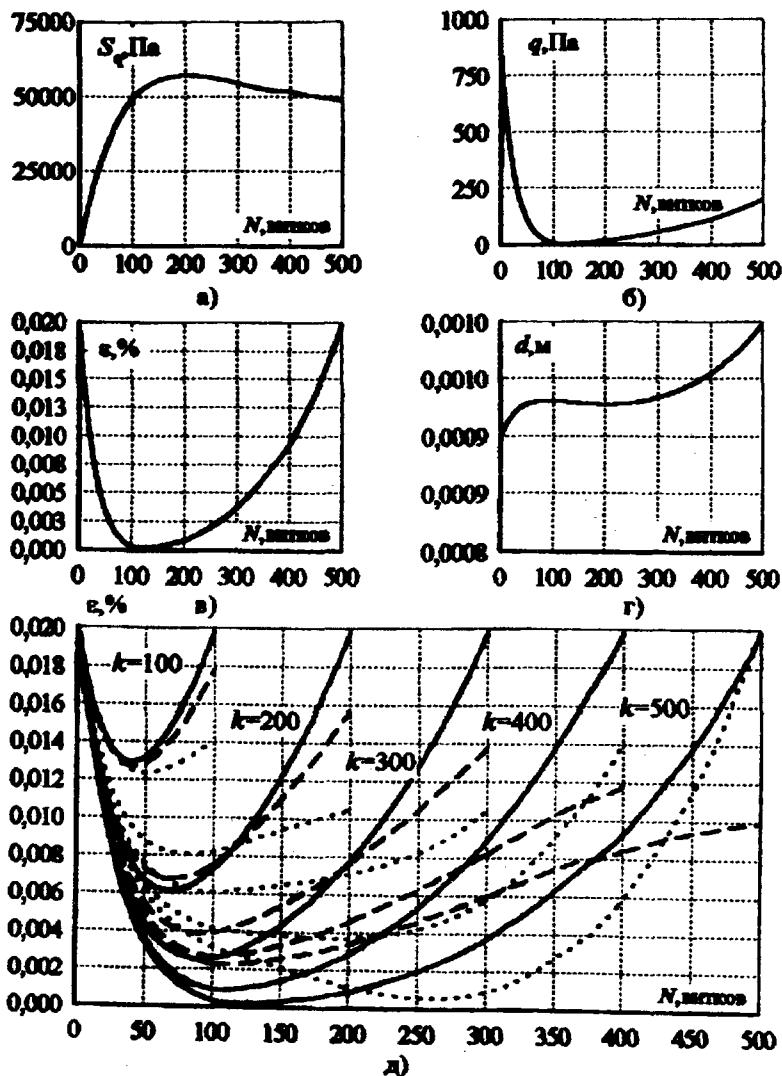


Рис. 4

Результаты расчета процесса намотки рулона объемом 500 витков при постоянном входном натяжении $F_0=100\text{H}$ и параметрах модели: $E'_\tau=5000\text{H}$; $\varepsilon_0=0,02$; $E_\tau=6,25 \cdot 10^6\text{Па}$; $E_r=3,19 \cdot 10^6\text{Па}$; $k=1,4$; $\mu_{tr}=0,5$; $\mu_{rr}=0,98$; $d_0 \approx 0,001\text{м}$; $B=0,8\text{м}$; $R_0=0,15\text{м}$ приведены на рис.4. Анализ результатов вычислительного эксперимента показывает возрастание по мере увеличения числа наложенных слоев давления S_q намотки на оправку (рис.4-а) и его стабилизацию после намотки 100...150 витков. В зависимости от деформационных свойств ткани и величины намоточного натяжения в конце намотки возможно снижение установившегося значения давления за счет перераспределения энергии перемещаю-

щихся к центру намотки напряженных слоев. Распределение давлений q по слоям намотки по окончании формирования рулона (рис.4-б) имеет максимальное значение вблизи оправки, а затем снижается, приближаясь к нулю, то есть слои 100...200 находятся на границе гофрообразования.

Относительное удлинение материала ε по слоям намотки по окончании формирования рулона (рис.4-в) равно начальному значению в начале и в конце намотки, поскольку первые витки не имеют возможности перемещаться в радиальном направлении, а последние витки вызывают меньшие деформации намотки за счет увеличения радиуса рулона и, следовательно, сохраняют запасенную энергию растяжения при наложении на поверхность рулона.

На рис.4-г приведено распределение толщины слоев по окончании намотки. Наибольшую деформацию испытывают витки вблизи оправки, в средней части рулона радиальная деформация слоев стабилизируется и ближе к периферическим слоям – снижается. Полученные результаты не противоречат полученным ранее в [5].

Важным с точки зрения управления процессом намотки является вопрос о зависимости напряженного состояния рулона от входного натяжения материала. На рис.4-д приведены расчетные кривые относительных удлинений слоев в рулоне по мере его формирования для трех законов изменения входного натяжения. При постоянном натяжении кривые изображены сплошными линиями, при линейно спадающем до 50% от начального значения натяжении – штриховыми, а пунктиром выделены зависимости при законе изменения натяжения в виде отрицательной полуволны синусоиды с начальной и конечной точками на уровне начального натяжения.

Анализ кривых показывает, что изменение входного натяжения позволяет добиться перераспределения деформаций в рулоне, а следовательно, и изменить распределение его плотностных характери-

стик. Это говорит о возможности управления процессом намотки за счет выбора на основании заданных критериев необходимого закона изменения намоточного натяжения.

ВЫВОДЫ

Разработана математическая модель процесса формирования рулона ткани на основе механических аналогий, обладающая структурной упорядоченностью и ориентированная на использование в микропроцессорной системе управления намоткой.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Сухарев В.А., Матюшев И.И.* Расчет тел намотки. – М., Легкая индустрия, 1982.
2. *Бегалко З.В., Живос С.В.* // Изв. вузов. Технология текстильной промышленности –1975, №3. С.54...58.
3. *Суриков В.И.* // Изв. вузов. Технология текстильной промышленности. –1971, №3. С.154...157.
4. *Кутын А.Ю., Маховер В.Л.* // Изв. вузов. Технология текстильной промышленности. –1998, №3. С.40...44.
5. *Ульянов В.И.* // Изв. вузов. Технология текстильной промышленности. –1968, №4. С.186...189.

Рекомендована кафедрой электропривода и автоматизации промышленных установок. Поступила 12.04.01.