

УДК 677.01

ПОЛНОЕ РЕШЕНИЕ УРАВНЕНИЯ ДИНАМИКИ НИТИ С УЧЕТОМ ПРОДОЛЬНЫХ И ПОПЕРЕЧНЫХ КОЛЕБАНИЙ

Р. Р. СААКЯН, Л. Е. ЖАБКО

(Санкт-Петербургский государственный университет технологии и дизайна)

Для диагностирования и прогнозирования свойств испытываемых нитей на многоопорной высокочастотной испытательной установке требуется на уровне достаточно полного математического моделирования динамики нити установить те факторы из свойств нити, которые отражаются на форме ее движения. В этих целях в соответствии с кинематической схемой уста-

новки [1] составлена математическая модель движения нити [2] и разработана конечно-разностная схема построения ее движения по Даламберу [3].

При построении полного уравнения движения (колебания) нити на высокочастотной многоопорной испытательной установке (при решении полной математической модели динамики нити) требуется по-

следовательное выполнение следующих задач:

- конкретизации для каждого участка осей U и V ;
- записи для каждого участка начальных и граничных условий;
- записи выражений для функций A , B , C , D на начальных участках изменения аргументов, необходимых для запуска расчетной схемы по Даламберу;
- получения на основе аналитических зависимостей правил для составления конечно-разностной схемы формирования функций A , B , C , D для каждого участка.

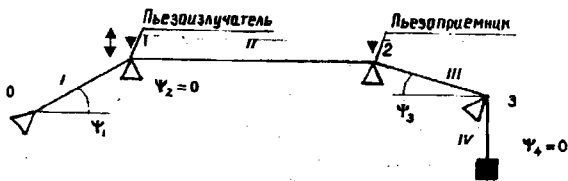


Рис. 1

Как показано в [1], общая кинематическая схема колебания нити имеет вид, представленный на рис.1, где I, II, III, IV – участки кинематической схемы; 0, 1, 2, 3 – ограничители движения; углы $\Psi_1, \Psi_2, \Psi_3, \Psi_4$ показывают положение нити в исходном натянутом состоянии и характеризуют положения системы координат для каждого участка, которые будут показаны ниже.

На кинематической схеме положения нити на участках (в том числе и наличие изломов на ограничителях движения) показаны условно.

Рассмотрим выполнение вышеуказанных задач для каждого участка отдельно.

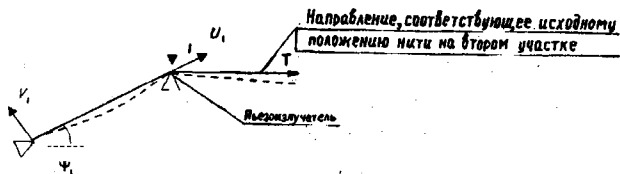


Рис. 2

На рис.2 первый участок нити представлен с ограничителями движения в точках 0 и 1 и осями координат U_1, V_1 ; второй участок представлен отрезком нити, действие которого заменено силой натяжения T .

Продольное движение.

Начальные и граничные условия соответственно:

$$U_1(0, x) = 0; U_1'(0, x) = 0, \quad (1)$$

$$U_1(t, 0) = 0; U(t, x_1(t)) = \ell_1 +$$

$$+ \alpha \sin(\Psi_1)(1 - \cos(\omega t)) - x_1(t). \quad (2)$$

Для организации построения решения по методу Даламбера запишем функции A_1, B_1 на начальных участках изменения аргумента:

$$A_1(p_1) = B_1(q_1) = 0 \quad (3)$$

при

$$q_1 \in [0, -\sqrt{\frac{\rho}{b}} x_1(0)] \text{ и } p_1 \in [0, \sqrt{\frac{\rho}{b}} x_1(0)].$$

Начальный участок необходим для запуска конечно-разностной схемы.

Зависимости для дальнейшего построения функций A_1, B_1 выглядят так:

$$A_1(p_1) = -B_1(p_1 - 2\sqrt{\frac{\rho}{b}} x_1(t)) + \ell_1 +$$

$$+ \alpha \sin(\Psi_1)(1 - \cos(\omega t)) - x_1(t), \quad (4)$$

$$B_1(q_1) = -A_1(q_1 = p_1). \quad (5)$$

Формулы (4) и (5) с учетом начальных условий (1) позволяют рекуррентно (последовательно вызывая A_1, B_1) построить функции A_1, B_1 при $q_1, p_1 \in [0, +\infty)$.

Поперечное движение.

Начальные и граничные условия соответственно:

$$V_1(0, x) = 0; V_1'(0, x) = 0, \quad (6)$$

$$V_1(t, 0) = 0;$$

$$V_1(t, x_1(t)) = \alpha \cos(\Psi_1)(1 - \cos(\omega t)). \quad (7)$$

Запишем функции С и D на начальных участках изменения аргументов:

$$C_1(p_1) = D_1(q_1) = 0 \text{ при}$$

$$q_1 \in [0, -\sqrt{\frac{\rho}{T}} x_1(0)] \text{ и } p_1 \in [0, \sqrt{\frac{\rho}{T}} x_1(0)]. \quad (8)$$

С учетом условий (7) аналитические выражения для построения функций С и D примут вид

$$C_1(p_1) = -D_1(p_1 - 2\sqrt{\frac{\rho}{T}} x_1(t)) + \alpha \cos(\Psi_1)(1 - \cos(\omega t)), \quad (9)$$

$$D_1(q_1) = -C_1(q_1 = p_1). \quad (10)$$

При дальнейшем формировании A_1 и B_1 с ростом p_1 по формуле (4) на основе данных по V_1 вычисляется значение A_1 . Значения функции B_1 пополняются за счет значений A_1 по формуле (5).

Аналогично строятся функции C_1 и D_1 .

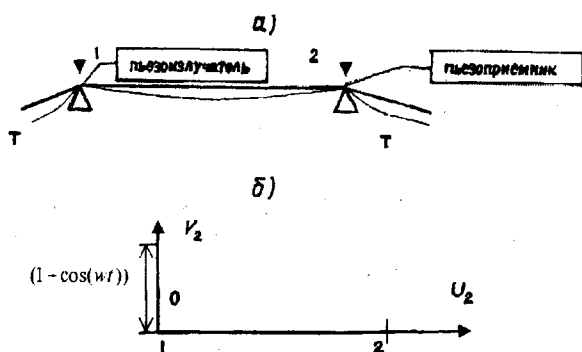


Рис. 3

На рис.3-а показан второй участок нити, а на рис.3-б – тот же участок с изображением системы координат и перемещения, создаваемого пьезоизлучателем в точке 1.

Продольное движение.

Начальные и граничные условия соответственно:

$$U_2(0, x) = 0; \quad U_2'(0, x) = 0, \quad (11)$$

$$U_2(t, x_1(t)) = \ell_1 - x_1(t);$$

$$U_2(t, x_2(t)) = \ell_1 + \ell_2 - x_2(t). \quad (12)$$

Условия (11) и (12) получены аналогично первому участку. В пространстве координат (U_2, V_2) положение точки 2 по оси U_2 равно 0.

Запишем функции A_2, B_2 на начальных участках изменения аргументов:

$$A_2(p_2) = B_2(q_2) = 0 \quad (13)$$

при

$$p_2 \in [\sqrt{\frac{\rho}{b}} \ell_1, \sqrt{\frac{\rho}{b}} (\ell_1 + \ell_2)]$$

и

$$q_2 \in [-\sqrt{\frac{\rho}{b}} \ell_1, -\sqrt{\frac{\rho}{b}} (\ell_1 + \ell_2)].$$

С помощью (12) составим схему построения $A_2(p_2)$ и $B_2(q_2)$:

$$B_2(q_2) = -A_2(q_2 + 2\sqrt{\frac{\rho}{b}} x_1) + \ell_1 - x_1(t), \quad (14)$$

$$A_2(p_2) = -B_2(p_2 - 2\sqrt{\frac{\rho}{b}} x_2) + \ell_1 + \ell_2 - x_2(t). \quad (15)$$

Поперечное движение.

Начальные и граничные условия соответственно:

$$V_2(0, x) = 0; \quad V_2'(0, x) = 0, \quad (16)$$

$$V_2(t, x_1) = \alpha(1 - \cos(\omega t)), \quad V_2(t, x_2) = 0. \quad (17)$$

На начальных участках изменения аргументов функции C_2 и D_2 следующие:

$$C_2(p_2) = D_2(p_2) = 0 \quad (18)$$

при

$$p_2 \in \left[\sqrt{\frac{g}{T}} \ell_1, \sqrt{\frac{g}{T}} (\ell_1 + \ell_2) \right];$$

$$q_2 \in \left[-\sqrt{\frac{g}{T}} \ell_1, -\sqrt{\frac{g}{T}} (\ell_1 + \ell_2) \right].$$

Запишем граничные условия в виде

$$V_2(t, x_1(t)) = C_2\left(t + \sqrt{\frac{g}{T}} x_1\right) + D_2\left(t - \sqrt{\frac{g}{T}} x_1\right) = \alpha(1 - \cos(\omega t)), \quad (19)$$

$$V_2(t, x_2(t)) = C_2\left(t + \sqrt{\frac{g}{T}} x_2\right) + D_2\left(t - \sqrt{\frac{g}{T}} x_2\right) = 0. \quad (20)$$

Для построения D_2 и C_2 с помощью зависимостей (19) и (20) соответственно получаем

$$D_2(q_2) = -C_2\left(q_2 + 2\sqrt{\frac{g}{T}} x_1\right) + \alpha(1 - \cos(\omega t)), \quad (21)$$

$$C_2(p_2) = -D_2\left(p_2 - 2\sqrt{\frac{g}{T}} x_2\right). \quad (22)$$

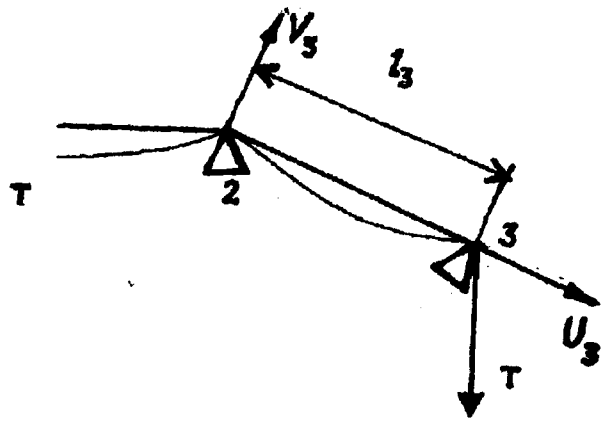


Рис. 4

На рис.4 представлен третий участок с изображением системы координат.

Продольное движение.

Начальные и граничные условия соответственно:

$$U_3(0, x) = 0; \quad U_3'(0, x) = 0, \quad (23)$$

$$U_3(t, x_2) = \ell_1 + \ell_2 - x_2(t);$$

$$U_3(t, x_3(t)) = \ell_1 + \ell_2 + \ell_3 - x_3. \quad (24)$$

Запишем функции A_3 и B_3 на начальных участках изменения аргументов:

$$A_3(p_3) = B_3(q_3) = 0,$$

$$p_3 \in \left[\sqrt{\frac{g}{b}} (\ell_1 + \ell_2), \sqrt{\frac{g}{b}} (\ell_1 + \ell_2 + \ell_3) \right], \quad (25)$$

$$q_3 \in \left[-\sqrt{\frac{g}{b}} (\ell_1 + \ell_2), -\sqrt{\frac{g}{b}} (\ell_1 + \ell_2 + \ell_3) \right].$$

Зависимости для получения конечно-разностной схемы построения функций A_3 и B_3 на остальных участках имеют вид:

$$B_3(q_3) = -A_3(q_3 - 2\sqrt{\frac{\rho}{b}}x_2) + l_1 + l_2 - x_2, \quad (26)$$

$$A_3(p_3) = -B_3(p_3 - 2\sqrt{\frac{\rho}{b}}x_3) + l_1 + l_2 + l_3 - x_3(t). \quad (27)$$

Поперечное движение.

Начальные и граничные условия соответственно:

$$V_3(0, x) = 0; \quad V_3'(0, x) = 0, \quad (28)$$

$$V_3(t, x_2) = 0; \quad V_3(t, x_3) = 0. \quad (29)$$

Запишем функции C_3 и D_3 на начальных участках изменения аргументов:

$$C_3(p_3) = D_3(q_3) = 0,$$

$$p_3 \in \left[\sqrt{\frac{\rho}{T}}(l_1 + l_2), \sqrt{\frac{\rho}{T}}(l_1 + l_2 + l_3) \right], \quad (30)$$

$$q_3 \in \left[-\sqrt{\frac{\rho}{T}}(l_1 + l_2), -\sqrt{\frac{\rho}{T}}(l_1 + l_2 + l_3) \right].$$

Для конечно-разностной схемы построения C_3 и D_3 из (29) получаем

$$D_3(q_3) = -C_3(q_3 + 2\sqrt{\frac{\rho}{T}}x_2), \quad (31)$$

$$C_3(p_3) = -D_3(p_3 - 2\sqrt{\frac{\rho}{T}}x_3). \quad (32)$$

Данные поперечные колебания при неучете сил веса на участке не присутствуют, при учете этих сил – тем более; при наличии взаимодействия каналов появляется поперечное колебание V .

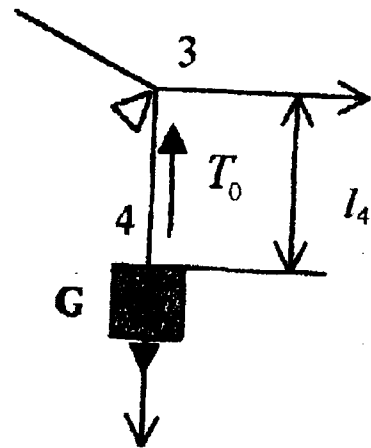


Рис. 5

На рис.5 изображен четвертый участок нити, где поперечные колебания отсутствуют, а продольные вызваны тем, что точки нити на опоре 3 ползают.

Продольное движение

Начальные условия:

$$U_4(0, x) = 0, \quad U_4'(0, x) = 0. \quad (33)$$

Запись функций A_4 и B_4 на начальных участках изменения аргументов:

$$A_4(p_4) = B_4(q_4) = 0,$$

$$p_4 \in \left(\sqrt{\frac{\rho}{b}}(l_1 + l_2 + l_3), \sqrt{\frac{\rho}{b}}(l_1 + l_2 + l_3 + l_4) \right),$$

$$q_4 \in \left(-\sqrt{\frac{\rho}{b}}(l_1 + l_2 + l_3 + l_4), -\sqrt{\frac{\rho}{b}}(l_1 + l_2 + l_3) \right). \quad (34)$$

$$q_4 \in \left(-\sqrt{\frac{\rho}{b}}(l_1 + l_2 + l_3 + l_4), -\sqrt{\frac{\rho}{b}}(l_1 + l_2 + l_3) \right).$$

$$-\sqrt{\frac{\rho}{b}}(l_1 + l_2 + l_3).$$

Граничные условия:

$$U_4(t, x_3) = \ell_1 + \ell_2 + \ell_3 - x_3(t). \quad (35)$$

Второе граничное условие в стандартной форме записано быть не может, поскольку точка 4 плавающая и ее координата изменяется в ходе колебаний. Поэтому вопрос о втором граничном условии рассмотрим подробнее.

Требование по первому граничному условию дает:

$$\begin{aligned} A_4(t + \sqrt{\frac{g}{b}}x_3) + B_4(t - \sqrt{\frac{g}{b}}x_3) = \\ = \ell_1 + \ell_2 + \ell_3 - x_3. \end{aligned} \quad (36)$$

Отсюда

$$\begin{aligned} B_4(t - \sqrt{\frac{g}{b}}x_3) = -A_4(t + \sqrt{\frac{g}{b}}x_3) + \\ + \ell_1 + \ell_2 + \ell_3 - x_3 \end{aligned}$$

или

$$\begin{aligned} B_4(q_3) = -A_4(q_3 + 2\sqrt{\frac{g}{b}}x_3) + \\ + \ell_1 + \ell_2 + \ell_3 - x_3. \end{aligned} \quad (37)$$

Вместо требования по второму граничному условию запишем уравнение движения груза весом G :

$$mU_{4t}'' = mg - [T_0 + bU_x']. \quad (38)$$

Второе слагаемое в правой части уравнения (38) учитывает силу от изменения деформации нити, а через U_x' обозначена производная по координате x .

Запишем уравнение (38) в общем виде:

$$mU_{4t}'' = mg - T_0 -$$

$$-b[A_4(t + \sqrt{\frac{g}{b}}x_4) + B_4(t - \sqrt{\frac{g}{b}}x_4)]_x'. \quad (39)$$

Производную от слагаемых в квадратных скобках, как было отмечено ранее, необходимо взять по координате x . Тогда получим

$$\begin{aligned} mU_{4t}'' = mg - T_0 - b[\sqrt{\frac{g}{b}}A_4' \cdot \\ \cdot (t + \sqrt{\frac{g}{b}}x_4) - \sqrt{\frac{g}{b}}B_4'(t - \sqrt{\frac{g}{b}}x_4)]. \end{aligned} \quad (40)$$

Здесь в квадратных скобках записаны производные по полным аргументам.

Интегрирование (40) по времени дает ($mg = T_0$):

$$\begin{aligned} mU_{4t}' = -b\sqrt{\frac{g}{b}}[A_4(t + \sqrt{\frac{g}{b}}x_4) - \\ - B_4(t - \sqrt{\frac{g}{b}}x_4)] \end{aligned} \quad (41)$$

или

$$\begin{aligned} mU_{4t}' = -b\sqrt{\frac{g}{b}}[A_4(p_4) - \\ - B_4(p_4 - 2\sqrt{\frac{g}{b}}x_4)]. \end{aligned} \quad (42)$$

В данном случае при интегрировании учитывалось, что производные от слагаемых в квадратных скобках (40) по полным составным аргументам равны производным от этих слагаемых по времени t .

Следовательно, для построения конечно-разностной схемы функции A_4 и B_4 будем иметь

$$A_4(t + \sqrt{\frac{\rho}{b}} x_4) = B_4(t - \sqrt{\frac{\rho}{b}} x_4) - \frac{m}{\sqrt{b\rho}} U'_{4t}$$

или

$$A_4(p_4) = B_4(p_4 - 2\sqrt{\frac{\rho}{b}} x_4) - \frac{m}{\sqrt{b\rho}} U'_{4t}. \quad (43)$$

На этапе запуска схемы полагаем $U'_{4t} = 0$, а при численном расчете U'_{4t} считываем по данным предыдущего шага по формуле (42). Кроме того, при расчете полной схемы следует считать $x_4 = l_1 + l_2 + l_3 + l_4 = \text{const}$.

Конечно-разностная расчетная схема реализуется по соотношению (43), при использовании которого привлекается также формула (42).

ЛИТЕРАТУРА

1. Романов В.Е., Жабко А.П., Климов В.А. // Изв. вузов. Технология текстильной промышленности. -1998, №6. С.83...84.
2. Червяков В.В., Жабко Л.Е. // Изв.вузов. Технология текстильной промышленности. -1999, №3. С.111...115.
3. Маежов Е.Г., Червяков В.В., Жабко Л.Е. // Изв.вузов. Технология текстильной промышленности. -1999, №4. С.115...122.

Рекомендована кафедрой автоматизации производственных процессов. Поступила 18.06.01.