ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

№ 5 (263) ТЕХНОЛОГИЯ ТЕКСТИЛЬНОЙ ПРОМЫШЛЕННОСТИ 2001

УДК 677.052.9

ПРИНЦИПЫ РАСЧЕТА ОСНОВНЫХ ХАРАКТЕРИСТИК НЕПОДВИЖНЫХ ВЬЮРКОВ

К.Ю. ПАВЛОВ

(Ивановская государственная текстильная академия)

При использовании неподвижных вьюрков в продуктах прядения [1] возникает крутка. Непременным условием образования крутки является такое расположение продукта прядения на поверхности вьюрка, при котором его ось находится на некоторой пространственной кривой, характеризующейся определенными значениями кривизны и естественного кручения.

В этом случае величина естественного кручения оси продукта прядения определяет величину образуемой крутки, а величина кривизны определяет в общем случае величину силы трения продукта прядения по поверхности неподвижного вьюрка. Таким образом, обе эти величины – и кривизна, и естественное кручение оси продукта прядения – являются важнейшими характеристиками при определении конструкции неподвижных вьюрков при их проектировании.

В каждой точке М пространственной кривой (кроме особых точек) определяются три прямые и три плоскости, взаимно пересекающиеся в точке М под прямыми углами:

1) касательная линия τ, определяемая как предельное положение секущей ММ′, когда М′→М;

2) нормальная плоскость, перпендикулярная к касательной. Все прямые, проходящие через точку М и лежащие в этой плоскости, называются нормалями к кривой в точке М;

3) соприкасающаяся плоскость как предельное положение плоскости, проходящей через три близкие точки кривой М′, М и М″, когда М′→М и М″→М. Соприкасающаяся плоскость содержит в себе касательную;

4) главная нормаль ν – линия пересечения нормальной и соприкасающейся плоскостей (нормаль, которая лежит в соприкасающейся плоскости);

5) бинормаль β – прямая, перпендикулярная к соприкасающейся плоскости;

6) спрямляющая плоскость, содержащая касательную и бинормаль.

Направления касательной, нормали и бинормали дают три взаимно перпендикулярные оси τ, ν, β с ортами $\bar{\tau}^{\circ}, \bar{\nu}^{\circ}, \bar{\beta}^{\circ}$, которые образуют подвижную систему координат, называемую натуральный или естественный трехгранник. Последний играет большую роль как в самой дифференциальной геометрии пространственных кривых и поверхностей, так и в различных приложениях, например, в механике.

Важными характеристиками для пространственных кривых являются кривизна k и естественное кручение χ. Кривизна кривой в точке М характеризует отклонение кривой от прямой линии и определяется формулой

$$\bar{k} = \frac{d\bar{\tau}^\circ}{ds} = \bar{\nu}^\circ k. \qquad (1)$$

Вектор кривизны направлен по главной нормали кривой. Модуль кривизны определяется как

$$k = \frac{1}{\varrho_1} = \frac{d\varphi}{ds}, \qquad (2)$$

где ϱ_1 – радиус кривизны; φ – угол, образованный между касательными в точках M и M′ (угол кривизны); s – длина дуги между точками M и M′. Значение k всегда положительно, то есть $k>0$.

Естественное кручение кривой χ в точке M характеризует отклонение кривой от плоского положения (оно имеет размерность рад/м):

$$\bar{\chi} = \frac{d\bar{\beta}^\circ}{ds} = \bar{\nu}^\circ \chi. \qquad (3)$$

Вектор естественного кручения направлен по главной нормали кривой. Его модуль определяется с помощью формулы

$$\chi = \frac{1}{\varrho_2} = \frac{d\psi}{ds}, \qquad (4)$$

где ϱ_2 – радиус кручения; ψ – угол, образованный между бинормалями в точках M и M′ (угол естественного кручения).

Линию в пространстве можно задать переменным радиусом-вектором:

$$\bar{r} = x\bar{i} + y\bar{j} + z\bar{k}, \qquad (5)$$

где x, y, z – суть функции переменных u или s, то есть

$$x=x(u),\ y=y(u),\ z=z(u). \qquad (6)$$

Приведенный в дифференциальной геометрии анализ пространственной кривой позволил установить следующие зависимости основных характеристик, то есть кривизны и естественного кручения от элементов второго и высших порядков этой кривой.

Так, в случае произвольного параметра u для кривизны имеем зависимость

$$k^2 = \frac{A^2 + B^2 + C^2}{\left(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2\right)^3}, \qquad (7)$$

а для величины естественного кручения – формулу

$$\chi = \frac{\begin{matrix} \dot{x} & \dot{y} & \dot{z} \\ \ddot{x} & \ddot{y} & \ddot{z} \\ \dddot{x} & \dddot{y} & \dddot{z} \end{matrix}}{A^2 + B^2 + C^2}, \qquad (8)$$

где $A = \dot{y}\ddot{z} - \ddot{y}\dot{z}$, $B = \dot{z}\ddot{x} - \ddot{z}\dot{x}$, $C = \dot{x}\ddot{y} - \ddot{x}\dot{y}$,

$$\dot{x} = \frac{dx}{du}, \qquad \dot{y} = \frac{dy}{du}, \qquad \dot{z} = \frac{dz}{du},$$

$$\ddot{x} = \frac{d^2x}{du^2}, \qquad \ddot{y} = \frac{d^2y}{du^2}, \qquad \ddot{z} = \frac{d^2z}{du^2},$$

$$\dddot{x} = \frac{d^3x}{du^3}, \qquad \dddot{y} = \frac{d^3y}{du^3}, \qquad \dddot{z} = \frac{d^3z}{du^3}.$$

В качестве примера проведен расчет кривизны и кручения оси продукта прядения, расположенной по винтовой линии.

В этом случае уравнение кривой

$$x = a\cos u,\ y = a\sin u,\ z = \alpha u, \qquad (9)$$

где α – коэффициент пропорциональности. Тогда

$$\dot{x} = -a\sin u, \quad \ddot{x} = -a\cos u, \quad \dddot{x} = a\sin u,$$

$$\dot{y} = a\cos u, \quad \ddot{y} = -a\sin u, \quad \dddot{y} = -a\cos u,$$

$$\dot{z} = \alpha, \qquad \ddot{z} = 0, \qquad z=0;$$

$$A = \dot{y}\ddot{z} - \ddot{y}\dot{z} = a\alpha\sin u,$$

$$B = \dot{z}\ddot{x} - \ddot{z}\dot{x} = -a\alpha\cos u,$$

$$C = \dot{x}\ddot{y} - \ddot{x}\dot{y} = a^2,$$

$$A^2 + B^2 + C^2 = a^2\left(a^2 + \alpha^2\right),$$

$$x^2 + y^2 + z^2 = a^2 + \alpha^2,$$

$$k^2 = \frac{a^2\left(a^2+\alpha^2\right)}{\left(a^2+\alpha^2\right)^3} = \frac{a^2}{\left(a^2+\alpha^2\right)^2}, \quad (10)$$

$$k = \frac{a}{a^2+\alpha^2}. \quad (11)$$

Для величины естественного кручения получим

$$\begin{vmatrix} \dot{x} & \dot{y} & \dot{z} \\ \ddot{x} & \ddot{y} & \ddot{z} \\ \dddot{x} & \dddot{y} & \dddot{z} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -a\sin u & -a\cos u & a\sin u \\ a\cos u & -a\sin u & -a\cos u \\ \alpha & 0 & 0 \end{vmatrix} = \alpha a^2, \quad (12)$$

$$\chi = \frac{\alpha}{a^2+\alpha^2}. \quad (13)$$

Следовательно, у продукта прядения, ось которого расположена по винтовой линии, величина кривизны и кручения во всех точках является величиной постоянной.

Рассмотрим случай, когда ось продукта прядения занимает пространственную кривую с переменной величиной кривизны и естественного кручения.

Пусть будет кривая

$$x = e^u \cos u, \quad y = e^u \sin u, \quad z = e^u. \quad (14)$$

Отсюда

$$k^2 = \frac{2}{3} e^{2u}(3 + \sin 2u), \quad (15)$$

$$\chi = \frac{2\sin^2 u}{e^u(3+\sin 2u)}. \quad (16)$$

Как видим, здесь кривизна и кручение являются величинами переменными и зависят от параметра u.

В этом случае в рассматриваемом уравнении (16) можно найти такой участок кривой, где значение величины естественного кручения будет в наибольшей степени удовлетворять условиям технологического процесса.

Исследуя же формулу (15), для кривизны можно выбрать такую длину дуги охватом продукта прядения поверхности неподвижного вьюрка, которая на основании формулы Эйлера будет соответствовать оптимальной силе трения, обусловленной технологическим процессом.

ВЫВОДЫ

Предложена методика расчета основных характеристик неподвижного вьюрка, которую можно использовать при их проектировании.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Павлов Ю.В.* Неподвижные вьюрки в прядении. – М.: Легкая индустрия, 1975.

Рекомендована кафедрой прядения. Поступила 14.05.01.