УДК 746.311:519.171.1
DOI 10.47367/0021-3497_2021_2_83

ПРИМЕНЕНИЕ АЛГОРИТМА ФЛЕРИ ПОСТРОЕНИЯ ЭЙЛЕРОВА ЦИКЛА НА СХЕМЕ ВЫШИВКИ КРЕСТОМ

APPLICATION OF THE FLEURY ALGORITHM FOR CONSTRUCTION OF THE EULER CYCLE ON THE CROSS STITCH PATTERN

Е.Р. БЕЛЯЕВА, А.С. КОТЮРГИНА

E.R. BELYAEVA, A.S. KOTYURGINA

**(Омский государственный университет путей сообщения,
Омский государственный технический университет)**

**(Omsk State Transport University,
Omsk State Technical University)**

E- mail: vamusya@mail.ru; vaskakot2007@yandex.ru

При вышивании крестом изнаночная сторона может быть неаккуратной. Как правило, это приводит к стягиванию и перекашиванию вышивки. Авторами решается вопрос о красивой изнаночной стороне. В вышивке крестом по цветам схема одного цвета может быть представлена в виде графа. При необходимости добавляются ребра, чтобы все степени вершин стали четными. На полученном мультиграфе строится эйлеров цикл. Это всегда возможно, поскольку выполняются необходимые и достаточные условия существования эйлерова цикла в графе (степени вершин графа должны быть четными). В результате получается вышивка, на лицевой стороне которой – аккуратные крестики, а на изнаночной – горизонтальные полоски.

When cross stitching, the wrong side may not be neat. As a rule, this leads to puckering and skewing of the embroidery. The authors decide the question of the beautiful seamy side. In cross stitch by color, a single color scheme can be represented as a graph. Edges are added as needed to make all vertex degrees even. The resulting multigraph is used to construct an Euler cycle. This is always possible, since the necessary and sufficient conditions for the existence of an Euler cycle in the graph are satisfied (the degrees of the vertices of the graph must be even). The result is an embroidery with neat crosses on the front side and horizontal stripes on the back side.

Ключевые слова: теория графов, алгоритмический подход, мультиграф, эйлеров цикл, схема вышивки крестом.

Keywords: graph theory, algorithmic approach, multigraph, Euler cycle, cross stitch pattern.

В наше время вышивка крестом не потеряла актуальности, то есть является наиболее распространенным видом народного искусства. DMS, Dimensions, Thea Gouverneur, Lanarte, Heritage, Penna, Dome, Золотое Руно, Риолис – вот далеко неполный список производителей наборов вышивки крестом, ниток, канвы, пялец и других аксессуаров вышивки. Сейчас, кроме своего прямого назначения, схемы вышивки крестом используются в изучении и построении сетей [1], изучении преобразований цифровых изображений [2], медицине, ветеринарии [3], [4], собственно вышивке [5].

Несмотря на широкое развитие швейного оборудования, вышивальных автоматов для вышивки крестом в традиционном понимании не существует [6]. Это связано с невозможностью перехода от крестиков с верхней ниткой по одной диагонали к тем же крестикам с верхней ниткой по другой диагонали любым автоматом. При ручной вышивке это затруднение легко обойти. Как правило, крестом вышивают картины, подушки, украшают одежду, но занавески, полотенца, салфетки и другие вещи, у которых видна изнаночная сторона, стараются украсить мережкой или вышивкой гладью. Это связано с некрасивой изнаночной стороной, которая получается у большинства вышивальщиц.

Мы предлагаем простой алгоритм, с помощью которого изнаночная сторона будет выглядеть красивой при любой сложности вышивки.

Постановка задачи

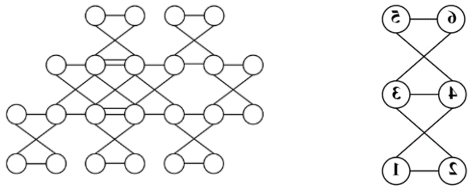
Будем рассматривать вышивку по цветам, то есть ту часть общей схемы, которую вышивают одним цветом. Эта часть схемы должна удовлетворять условию связности, то есть все квадратики должны иметь хотя бы одну общую вершину. Мы хотим, чтобы на лицевой стороне были крестики, а с изнаночной – только горизонтальные полоски.

Легко видеть, что часть схемы вышивки крестом представляет собой граф, где вершины – это углы крестиков, а ребра – это сами крестики и горизонтальные отрезки, соединяющие вершины крестиков.

Задача свелась к построению эйлерова цикла на графе. Нужно найти такой цикл, который пройдет по всем ребрам так, чтобы на лицевой стороне вышивки были крестики, а на изнаночной стороне – горизонтальные отрезки.

На рис. 1 показано построение мультиграфа (а) и эйлерова цикла (б) на схеме вышивки крестом.

Поскольку эйлеров цикл существует только тогда, когда граф связный и все степени вершин четны [7], то добавим по одному (или больше) горизонтальному ребру так, чтобы все степени вершин стали четными (рис. 1-а).



а) б)

Рис. 1

Назовем мультиграфы такого вида (рис. 1) В-графами.

Для В-графов можно воспользоваться алгоритмом Флери [8].

Пусть задан граф G(V,E)

1. Начнем цикл с произвольной вершины u. Присвоим произвольному ребру uv, инцидентному u, номер 1. Удалим из графа ребро uv и перейдем в вершину v.

2. Пусть после k шагов мы находимся в вершине w. Выбираем произвольное ребро wt, причем мост выбирается только в том случае, если нет другой возможности. Ребру wt присвоим номер (k+1). Удалим из графа ребро wt и перейдем в вершину t.

Результаты исследования

В построенном мультиграфе есть эйлеров цикл. В условиях нашей задачи обходить граф мы можем, только чередуя в любом порядке звенья, представленные на рис. 2.

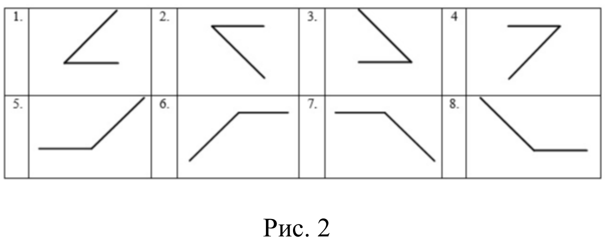


Рис. 2

Вначале всегда проходим по горизонтальному ребру, а затем по полукресту и удаляем их (согласно алгоритму Флери). Следовательно, за один проход через вершину будут убираться по два ребра, поскольку следующее звено будет выходить из конечной вершины рассматриваемого звена.

Определение. Столбцом в В-графе будем называть подграф, смежные вершины которого находятся на расстоянии ребра по горизонтали, и наклонного ребра – по вертикали. Причем в горизонтальной проекции всегда будет одно ребро.

На рис. 1-а столбцов – 6.

Самой простой схемой для построения эйлерова цикла является прямоугольник любых размеров (в нашем случае столбец). На рис. 1-б показано, как строить эйлеров цикл: 1–2–3–4–5–6–3–4–1 с помощью звеньев 1;1;2;2.

Пусть задан В-граф G (V, E). Не умаляя общности, всегда будем начинать "снизу слева" то есть с левого нижнего крестика. И будем считать, что пройденные ребра вычеркнуты.

Поскольку эйлеров цикл – это объединение всех простых циклов графа, то нам нужно построить все простые циклы, а потом объединить их в один. Для построения простого цикла от первого столбца вышивки нужно построить цепь к последнему столбцу прямым ходом, чтобы избежать мостов (чтобы G (V, E) не распался на две связные компоненты). Возвращаясь в исходную точку обратным ходом, заполним все столбцы крестиками.

Через v_k, $k \in N$ обозначим вершины, которым инцидентны ребра двух соседних столбцов, входящие в эйлерову цепь, построенную на шаге 1.

Звеном 1 начнем строить цикл из левого нижнего крестика столбца 1. Начальная вершина – v_1.

Пусть построен путь до столбца k и вершины v_k.

Шаг 1. Прямой ход построения простого цикла.

a) Из вершины v_k с помощью звена 5 или 7 переходим на столбец (k+2), если в G(V,E) есть соответствующие ребра.

b) Если в G(V,E) соответствующих ребер нет, то из вершины v_k с помощью звена 3(4) поднимаемся (спускаемся) по столбцу (k+1) вверх (вниз) до тех пор, пока не найдется таких ребер в столбце (k+2), чтобы можно было воспользоваться звеньями 5 или 7 для перехода к столбцу (k+2). Если таких ребер не найдется, то, воспользовавшись звеном 4 (3), возвратимся к вершине v_k, закрыв верхние (нижние) крестики столбца (k+1). Двигаясь далее вниз (вверх) по этому столбцу с помощью звена 4 (3), найдем ребра, с помощью которых, воспользовавшись звеньями 5 или 7, можно перейти к столбцу (k+2).

Получим вершины v_k, v_{k+1}, v_{k+2}, принадлежащие эйлеровой цепи.

Продолжаем использовать пункты a) или b) **Шага 1** до тех пор, пока не дойдем до последнего столбца n и вершины v_n. Столбец n – последний, поскольку крестами или полукрестами он заполнен весь, но ни одного ребра, инцидентного правым вершинам столбца n, нет.

Шаг 2. Обратный ход построения простого цикла.

Последний столбец в общем случае состоит из крестиков и полукрестов, а мы находимся в вершине v_n.

По последнему столбцу поднимаемся с помощью звена 1 или 3 до вершины v_{n-1}. С помощью звеньев 6 или 8 (или 1, или 2) переходим на столбец (n-1). В этом столбце также закрываем крестики и полукресты, приходим в вершину v_{n-2}. Таким образом, проходя по всем столбцам вверх и вниз, и используя найденные ранее вершины как точки перехода от одного столбца к другому, придем в исходную вершину v_1.

Так как все столбцы пройдены сверху вниз (снизу вверх), то эйлеров цикл построен. Поскольку мы начинали строить цикл слева, дошли до правого конца схемы, а затем вернулись в начало, то назовем такой цикл слева направо. Аналогично строится эйлеров цикл справа налево.

Обозначим шаги такого цикла через **Шаг 1'** и **Шаг 2'**.

Объединим все простые циклы в эйлеров цикл на графе G (V, E).

Для этого воспользуемся алгоритмом:

1). **Шаг 1.**

2). Когда достигли последнего столбца n, то, двигаясь по нему вверх или вниз, проверяем наличие мостов справа и слева. Если мост справа, то переходим к пункту a) **Шага 1**, затем к **Шагу 2**. Если мост слева, то переходим к пункту а) **Шага 1'**, затем к **Шагу 2'**. Продолжаем двигаться к начальной вершине с помощью **Шага 2**.

3). Пройдя таким образом по всем столбцам, вернемся в вершину v_1.

Сложность алгоритма равна числу ребер в В-графе.

Пример. Построить эйлеров цикл на В-графе.

На рис. 3 представлен граф и решение (горизонтальные кратные ребра не указаны, чтобы не загромождать рисунок).

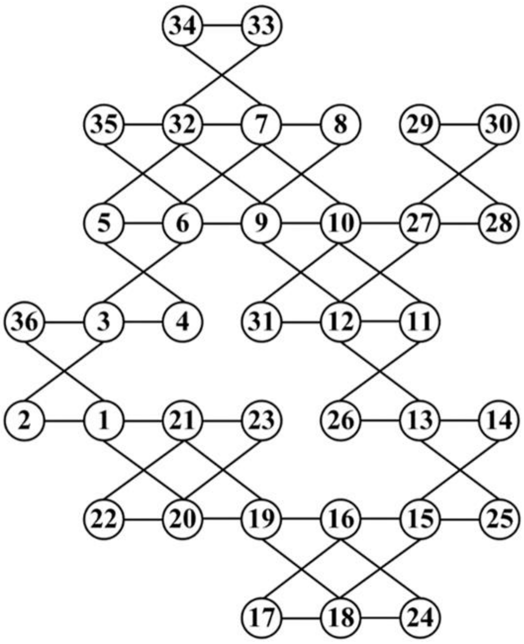


Рис. 3

Найдем левый дальний крест. Будем нумеровать вершины по ходу построения цикла.

1). **Шаг 1.** 1–2–3–4–5–6–7–8–9–10–11–12–13–14–15. Используя звенья 1;3;5;4;7;2;4, достигаем вершины 15, которая принадлежит последнему столбцу. Если перейдем к **Шагу 2**, то граф разобьется на две компоненты, поэтому переходим к **Шагу 1'**: 15–16–17–18–19–20–1 с помощью звеньев 6;3;8.

Достигли начальной вершины 1 и, используя **Шаг 2'**, возвращаемся, заполняя все пройденные столбцы.1–21–22–20–23–21–19–16–17–18–15 с помощью звеньев 4;2;4;5. Возвратились в вершину 15, где избежали моста.

2). **Шаг 2**. 15–25–13–26–11–12–27 с помощью звеньев 1;1;1. Ребро 10–17 есть мост, поэтому возвращаемся к **Шагу 1**: 27–28–29 (звено 1). Переходим к **Шагу 2**: 29–30–27 (звено 4). Продолжаем строить цикл: 27–10–31–12–9–10–7–32–33–34–7–32–9–6–35–32–5–6–3–36–1 с помощью звеньев 6; 3; 3; 1; 2; 2; 8; 4; 2.

Заключение

Нахождение эйлерова цикла является непростой задачей для графов общего вида. Поскольку В-графы обладают некоторой спецификой, связанной с жесткой схемой вышивки крестом, то задача построения эйлерова цикла решилась.

Таким образом, при вышивке крестом по цветам всегда можно добиться красивой изнанки, причем можно начинать построение цикла (вышивать) из любой вершины. На рис. 4 показаны примеры вышивок с лицевой и изнаночной стороны, выполненные авторами статьи.

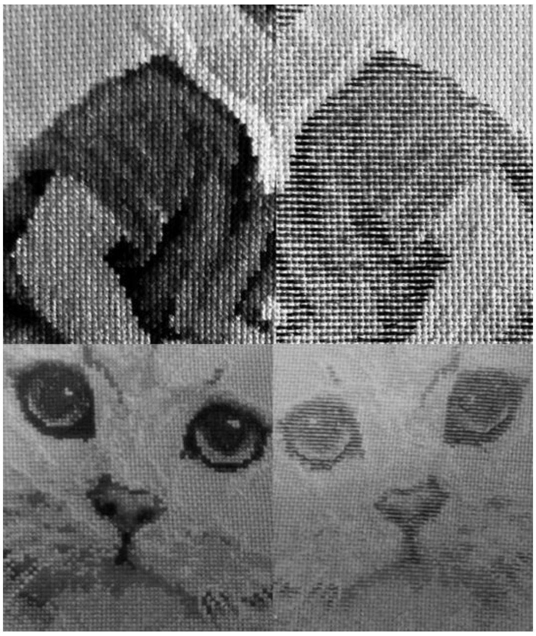


Рис. 4

ЛИТЕРАТУРА

1. *Ishan Misra, Abhinav Shrivastava, Abhinav Gupta, Martial Hebert.* Stitch Networks for Multi-task Learning // 2016 IEEE Conference on Computer Vision and Pattern Recognition (CVPR). – 27-30 June 2016.

2. *David Setiabudi, Sani M. Isa, Bambang Heru Iswanto.* Digital color classification for colorful cross stitch threads using RGB+Euclidean Distance and

LAB+CIE94 // 2016 International Conference on Information & Communication Technology and Systems (ICTS). – 12-12 Oct. 2016.

3. Massey P., McClary K., Parker D., Barton R.S., Solitro G. The rebar repair for radial meniscus tears: a biomechanical comparison of a reinforced suture repair versus parallel and cross-stitch techniques // Journal of Experimental Orthopaedics. – 6(1), 2019. P.38.

4. *Nakama G.Y., Kaleka C.C., Franciozi C.E., (...), Cohen M., LaPrade R.F.* Biomechanical Comparison of Vertical Mattress and Cross-stitch Suture Techniques and Single- and Double-Row Configurations for the Treatment of Bucket-Handle Media l Meniscal Tears // American Journal of Sports Medicine. 4– 7(5), 2019. P. 1194...1202.

5. *Kun L.I., Qiang L.I., Hongguang Y.E.* Appli-cation of Huangmei Cross-stitch in modern women's wear design // Journal of Silk. – 56(7), 2019.

6. https://ru.wikipedia.org/wiki/Вышивка_крестом.

7. *Оре О.* Теория графов. – М.: Наука, 1980.

8. *Кристофидес Н.* Теория графов. Алгоритмический подход. – М.: Мир, 1978.

R E F E R E N C E S

1. Ishan Misra, Abhinav Shrivastava, Abhinav Gupta, Martial Hebert. Stitch Networks for Multi-task Learning // 2016 IEEE Conference on Computer Vision and Pattern Recognition (CVPR). – 27-30 June 2016.

2. David Setiabudi, Sani M. Isa, Bambang Heru Iswanto. Digital color classification for colorful cross stitch threads using RGB+Euclidean Distance and LAB+CIE94 // 2016 International Conference on Information & Communication Technology and Systems (ICTS). – 12-12 Oct. 2016.

3. Massey P., McClary K., Parker D., Barton R.S., Solitro G. The rebar repair for radial meniscus tears: a biomechanical comparison of a reinforced suture repair versus parallel and cross-stitch techniques // Journal of Experimental Orthopaedics. – 6(1), 2019. P.38.

4. Nakama G.Y., Kaleka C.C., Franciozi C.E., (...), Cohen M., LaPrade R.F. Biomechanical Comparison of Vertical Mattress and Cross-stitch Suture Techniques and Single- and Double-Row Configurations for the Treatment of Bucket-Handle Media l Meniscal Tears // American Journal of Sports Medicine. 4– 7(5), 2019. P. 1194...1202.

5. Kun L.I., Qiang L.I., Hongguang Y.E. Appli-cation of Huangmei Cross-stitch in modern women's wear design // Journal of Silk. – 56(7), 2019.

6. https://ru.wikipedia.org/wiki/Vyshivka_krestom.

7. Ore O. Teoriya grafov. – M.: Nauka, 1980.

8. Kristofides H. Teoriya grafov. Algoritmicheskiy podkhod. – M.: Mir, 1978.

Рекомендована кафедрой математических методов и информационных технологий в экономике ОГТУ. Поступила 10.02.21.