УДК 677.021

ПОДЖАТИЕ ВОЛОКНОВОЗДУШНОЙ СМЕСИ ПРИ ФОРМИРОВАНИИ ПОЛУФАБРИКАТА ПРЯДЕНИЯ

Ф. Р. КАХРАМАНОВ, И. В. ФРОЛОВА, Н. Г. ЧИСТОБОРОДОВА

(Ивановская государственная текстильная академия, Московский государственный текстильный университет им. А.Н. Косыгина)

Рабочие органы текстильных машин, по которым движется продукт в процессе его переработки, часто имеют форму короткого канала. Рассмотрим изменение скорости течения и давления волокновоздушной смеси как вдоль короткого канала, так и поперек в радиальном направлении.

Основным допущением для этого технологического процесса является то, что все характеристики волокновоздушной смеси (в том числе и коэффициент вязкости) остаются для всех точек канала постоянными в связи с тем, что градиенты давления воздушного потока значительно меньше, чем волокнистой смеси.

При сделанных допущениях воспользуемся уравнениями движения для любой однородной деформируемой среды в компонентах напряжений:

$$\left.\begin{aligned} \omega_x &= F_x - \frac{1}{\rho}\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{1}{\rho}\left(\frac{\partial \tau_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z}\right), \\ \omega_y &= F_y - \frac{1}{\rho}\frac{\partial P}{\partial y} + \frac{1}{\rho}\left(\frac{\partial \tau_{yx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z}\right), \\ \omega_z &= F_z - \frac{1}{\rho}\frac{\partial P}{\partial z} + \frac{1}{\rho}\left(\frac{\partial \tau_{zx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zz}}{\partial z}\right), \end{aligned}\right\} \tag{1}$$

где содержится 6 неизвестных компонент напряжения и 3 компоненты ускорения. Чтобы сделать систему полной, необходимо обратиться к рассмотрению физических свойств изучаемой среды и исходя из них установить связь между компонентами напряжений и величинами, характеризующими деформацию среды.

Установив зависимость компонент напряжений скоростей, можно получить уравнения движения в компонентах скорости. Подставим для этого в (1) значения компонент напряжений в виде

$$\tau_{xx} = 2\mu\frac{\partial v_x}{\partial x},$$

$$\tau_{xy} = 2\mu\,\varepsilon_{xy} = \mu\left(\frac{\partial v_x}{\partial y} + \frac{\partial v_y}{\partial x}\right). \tag{2}$$

Аналогично найдем τ_{yy}, τ_{yz}, τ_{zz}, τ_{zx}. Считая плотность среды $\rho = \text{const}$ и принимая во внимание

$$\nu = \frac{\mu}{\rho},$$

получим уравнения движения вязкой среды:

$$\left.\begin{aligned}
\omega_x &= F_x - \frac{1}{\rho}\frac{\partial P}{\partial x} + 2\frac{\partial}{\partial x}\nu\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y}\nu\left(\frac{\partial v_x}{\partial y} + \frac{\partial v_y}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\nu\left(\frac{\partial v_x}{\partial z} + \frac{\partial v_z}{\partial x}\right),\\
\omega_y &= F_y - \frac{1}{\rho}\frac{\partial P}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial x}\nu\left(\frac{\partial v_y}{\partial x} + \frac{\partial v_x}{\partial y}\right) + 2\frac{\partial}{\partial y}\nu\frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial z}\nu\left(\frac{\partial v_y}{\partial z} + \frac{\partial v_z}{\partial y}\right),\\
\omega_z &= F_z - \frac{1}{\rho}\frac{\partial P}{\partial z} + \frac{\partial}{\partial x}\nu\left(\frac{\partial v_z}{\partial x} + \frac{\partial v_x}{\partial z}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\nu\left(\frac{\partial v_z}{\partial y} + \frac{\partial v_y}{\partial z}\right) + 2\frac{\partial}{\partial z}\nu\frac{\partial v_z}{\partial z}.
\end{aligned}\right\} \quad (3)$$

При сделанном допущении коэффициент вязкости $\mu = \text{const}$. В случае ненагреваемой среды будем иметь $\nu = \text{const}$, и тогда, подставляя левые части системы уравнений (3) в виде

$$\omega = \frac{\partial v}{\partial t} + v_x\frac{\partial v}{\partial x} + v_y\frac{\partial v}{\partial y} + v_z\frac{\partial v}{\partial z}$$

и используя уравнение неразрывности

$$\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z} = 0,$$

после преобразований получим

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{\partial v_x}{\partial t} + v_x\frac{\partial v_x}{\partial x} + v_y\frac{\partial v_x}{\partial y} + v_z\frac{\partial v_x}{\partial z} = F_x - \frac{1}{\rho}\frac{\partial P}{\partial x} + \nu\left(\frac{\partial^2 v_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v_x}{\partial z^2}\right),\\
&\frac{\partial v_y}{\partial t} + v_x\frac{\partial v_y}{\partial x} + v_y\frac{\partial v_y}{\partial y} + v_z\frac{\partial v_y}{\partial z} = F_y - \frac{1}{\rho}\frac{\partial P}{\partial y} + \nu\left(\frac{\partial^2 v_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_y}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v_y}{\partial z^2}\right),\\
&\frac{\partial v_z}{\partial t} + v_x\frac{\partial v_z}{\partial x} + v_y\frac{\partial v_z}{\partial y} + v_z\frac{\partial v_z}{\partial z} = F_z - \frac{1}{\rho}\frac{\partial P}{\partial z} + \nu\left(\frac{\partial^2 v_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_z}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v_z}{\partial z^2}\right),\\
&\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z} = 0.
\end{aligned}\right\} \quad (4)$$

Вместе с последним уравнением неразрывности – это полная система уравнений относительно неизвестных v_x, v_y, v_z, P, которые определяются как функции координат x, y, z и времени $t = t_0$, так как при установившемся движении волокновоздушной смеси необходимость начальных условий отпадает.

Пренебрегая действием массовых сил и принимая во внимание симметрию круглого сечения, имеем

$$F = 0, \quad v_r = v_\varphi = 0, \quad v_z = v(r,z). \qquad (5)$$

При этих условиях уравнения движения в цилиндрических координатах запишутся в виде

$$\left.\begin{aligned} &\frac{\partial P}{\partial z} = \mu\left(\frac{\partial^2 v}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial v}{\partial r}\right), \\ &\frac{\partial P}{\partial r} = 0, \quad \frac{\partial P}{\partial \varphi} = 0, \quad \frac{\partial v}{\partial z} = 0. \end{aligned}\right\} \qquad (6)$$

Последнее уравнение системы (6) вместе с условиями (5) дает значения $v = v(r)$.

Тогда в первом уравнении системы (6) левая часть является функцией z, а правая – только r, откуда согласно

$$\frac{\partial P}{\partial x} = -\frac{P_0 - P_1}{l}$$

следует

$$\frac{\partial P}{\partial z} = \text{const} = -\frac{P_0 - P_1}{l}, \qquad (7)$$

где P_0 и P_1 – давления в двух поперечных сечениях на расстоянии l друг от друга.

В результате первое уравнение системы (6) превращается в обыкновенное дифференциальное уравнение

$$\frac{1}{r}\frac{d}{dr}\left(r\frac{dv}{d}\right) = \frac{1}{\mu}\frac{\partial P}{\partial z}, \qquad (8)$$

общее решение которого при условии (7) имеет вид

$$v = \frac{1}{4\mu}\frac{\partial P}{\partial z}r^2 + C_1 \ln r + C_2. \qquad (9)$$

Таким образом, при ограниченной скорости на оси канала $C_1 = 0$. Определив C_2 с учетом граничных условий $v = 0$ при $r = R$, найдем

$$v = \frac{1}{4\mu}\frac{\partial P}{\partial z}\left(R^2 - r^2\right). \qquad (10)$$

Тогда профиль скоростей воздушного потока в любом сечении канала оказывается параболическим. Поэтому

$$v_z = 2v\left(1 - \frac{r^2}{R^2}\right). \qquad (11)$$

Дальнейшее решение сводится к определению закона распределения давлений по сечению канала. Для этого используем уравнение притока воздушного потока в смесь в цилиндрических координатах:

$$\frac{\partial P}{\partial t} + v_r\frac{\partial P}{\partial r} + \frac{v_\varphi}{r}\frac{\partial P}{\partial \varphi} +$$

$$+ v_z\frac{\partial P}{\partial z} = \frac{E}{\rho C_p J} +$$

$$+ a\left[\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial P}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 P}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 P}{\partial z^2}\right], \qquad (12)$$

где E – функция рассеяния механической энергии в тепловую.

Отбросим в (12) члены, содержащие производные по t, φ, $\partial^2 P/\partial z^2$ и E, в связи с установившимся технологическим процессом, полагая при этом, что в радиальном направлении давление изменяется значительно сильнее, чем в направлении оси канала. В результате (12) с учетом (11) примет вид

$$\frac{\partial^2 P}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial P}{\partial r}=\frac{2\,v}{a}\left(1-\frac{r^2}{R^2}\right)\frac{\partial P}{\partial z}. \qquad (13)$$

Считаем, что во входном сечении канала воздушноволокнистая смесь имеет одинаковое давление P_0, а давление на стенках канала P_c. Тогда безразмерные переменные имеют значения

$$v=\frac{P-P_c}{P_0-P_c}, \qquad r_1=\frac{r}{R}, \qquad z_1=\frac{z}{R}. \qquad (14)$$

Выражение (13) запишем в виде

$$\frac{\partial^2 v}{\partial r_1^2}+\frac{1}{r_1}\frac{\partial v}{\partial r_1}=\frac{1}{a_1}\left(1-r_1^2\right)\frac{\partial v}{\partial z}, \qquad (15)$$

где $a_1 = a / 2vR$.

С учетом граничных условий, когда по линии раздела у стенок канала давление среды совпадает с давлением на стенке:

$$\text{при} \quad r_1=1 \quad (z_1>0) \quad v=0 \qquad (16)$$

и

$$\text{при} \quad z=0 \quad (r_1<1) \quad v=1, \qquad (17)$$

частное решение уравнения (15) можно представить в виде

$$v=\chi(r_1)e^{-\beta^2 a_1 z_1}, \qquad (18)$$

где β – постоянный параметр.

После подстановки (18) в (15) получим

$$\frac{d^2\chi}{dr^2}+\frac{1}{r}\frac{d\chi}{dr}+\beta^2\left(1-r^2\right)\chi=0.$$

Решение последнего уравнения зависит от ряда особенностей канала. В нашем случае при $r_1 = 0$ имеем значения

$$\chi(r_1,\beta)=1-\frac{\beta^2}{4}r_1^2+$$

$$+\frac{3}{2\cdot 4}\left(\beta^2+\frac{\beta^4}{4}\right)r_1^4+\ldots \qquad (19)$$

При граничном условии $r_1 = 1$ (16) необходимо, чтобы правая часть ряда обратилась в нуль, что приводит к определению ряда различных численных значений β. При этом каждому корню соответствует свое значение функции $\chi(r_1, \beta_n)$ или $\chi(r_1)$, а общее решение уравнения (15) будет иметь вид [1]:

$$v=\sum_{n=1}^{\infty}A_n\chi_n(r_1)e^{-\beta_n^2 a_1 z_1}, \qquad (20)$$

где A_n – постоянная интегрирования с граничными условиями (17).

ВЫВОДЫ

Найдена зависимость безразмерного давления v от координат r_1 и z_1, выраженная пространственной диаграммой согласно численным значениям a_1, z_1, r_1 и v. Причем картина распределения давления в определенной степени будет аналогична картине распределения скоростей воздушного потока в канале.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Graetz L.* // Ann d. Physik– T.18, 1983. C.79.

Рекомендована кафедрой начертательной геометрии и черчения. Поступила 01.02.00.