УДК 539.434:677.494

КАНОНИЧЕСКОЕ УРАВНЕНИЕ НЕЛИНЕЙНО-НАСЛЕДСТВЕННОЙ ВЯЗКОУПРУГОСТИ НИТЕЙ И ДРУГИХ СИНТЕТИЧЕСКИХ МАТЕРИАЛОВ

А.М. СТАЛЕВИЧ

(Санкт-Петербургский государственный университет технологии и дизайна)

Среди физико-механических характеристик синтетических материалов важное место занимают релаксирующий модуль и податливость [1], предназначаемые как для сравнительного анализа материалов, так и для расчета их нагруженных состояний в широком диапазоне неразрушающей механической нагрузки.

Сложившиеся представления о наследственном характере процессов деформирования или нагружения полимерных материалов [1] определяют актуальность исследования этих процессов у различных текстильных материалов – и прежде всего у синтетических нитей, тканей, кож и т.д. Гипотеза об активирующем характере воздействия приложенной механической нагрузки на времена релаксации или запаздывания [2, 3] подтвердилась многочисленными измерениями и привела к соответствующей модификации [4...7] уравнений Больцмана-Вольтерры [1]. При этом благодаря выбору физически обоснованных ядер релаксации и запаздывания [4, 5] удалось добиться, во-первых, заметного упрощения уравнений состояния по сравнению с уравнениями, широко применяемыми в строительной механике [8], и, во-вторых, распространения этих уравнений на случай нелинейной вязкоупругости.

Разработан ряд методик определения соответствующих характеристик [6], однако вопрос об уточнении этих характеристик в связи с их наследственно-интегральной спецификой продолжает представлять несомненный интерес для материаловедов, занимающихся анализом физико-механических свойств различных полимерных материалов с позиции физики полимеров.

Детально рассмотрены выводы двух уравнений теории нелинейно-наследственной вязкоупругости [4...7]: уравнения наследственной релаксации

$$\sigma_t = E_0\varepsilon_t + \int_0^t \varepsilon_0 E'_{\varepsilon;t-0}d\theta \quad (1)$$

и уравнения наследственной ползучести

$$\varepsilon_t = D_0\sigma_t + \int_0^t \sigma_0 D'_{\sigma;t-0}d\theta, \quad (2)$$

где t – время; ε – деформация; σ – напряжение; $E_{\varepsilon t}$ – релаксирующий модуль; $D_{\sigma t}$ – податливость; $E'_{\varepsilon t} = \frac{\partial E_{\varepsilon t}}{\partial t}$ – нелинейно-наследственное ядро релаксации; $D'_{\sigma t} = \frac{\partial D_{\sigma t}}{\partial t}$ – нелинейно-наследственное ядро ползучести [6].

Уравнение (1) оказывается продуктивным в случаях, когда переменная величина деформации известна, например, при аналитическом описании диаграммы растяжения. Уравнение (2) становится удобным, когда задается переменная величина напряжения.

С учетом $E_0D_0 = E_\infty D_\infty = 1$ (2) можно переписать в виде

$$\sigma_t = E_0\varepsilon_t - E_0\int_0^t \sigma_\theta D'_{\sigma;t-\theta}d\theta,$$

и тогда совместно с (1) получим следующую взаимосвязь между ядрами уравнений (1) и (2):

$$-\int_0^t \varepsilon_\theta E'_{\varepsilon;\ t-\theta}d\theta = E_0\int_0^t \sigma_\theta D'_{\sigma;\ t-\theta}d\theta. \quad (3)$$

Напомним, что при $\varepsilon = \text{const}$ из (1) получается релаксирующий модуль

$$\varepsilon^{-1}\sigma_{\varepsilon t} = E_{\varepsilon t} = E_0 - (E_0 - E_\infty)\varphi_{\varepsilon t} =$$

$$= E_0(1-(1-c)\varphi_{\varepsilon t}), \quad (4)$$

а при $\sigma = \text{const}$ из (2) податливость

$$\sigma^{-1}\varepsilon_{\sigma t} = D_{\sigma t} = D_0 + (D_\infty - E_0)\varphi_{\sigma t} =$$

$$= E_0^{-1}\left(1+\frac{1-c}{c}\varphi_{\sigma t}\right), \quad (5)$$

где $c = E_\infty^{+1}E_0^{-1}$, $\varphi_{\varepsilon t} \in (0;1)$ и $\varphi_{\sigma t} \in (0;1)$ – нормированные функции.

С учетом (4) и (5) из (3) имеем взаимосвязь между нормированными функциями:

$$\int_0^t \sigma_\theta \varphi'_{\sigma;\ t-\theta}d\theta = E_\infty\int_0^t \varepsilon_\theta \varphi'_{\varepsilon;\ t-\theta}d\theta. \quad (6)$$

В (6) отчетливо видна интегральная симметрия нормированных нелинейно-наследственных ядер уравнений (1) и (2). Если воспользоваться свойствами интегральных сверток [9], то, учитывая, что $\varphi_{\sigma(0)} = 0$ и $\varphi_{\varepsilon(0)} = 0$, из (6) с помощью интегрирования получим также симметрию соответствующих нормированных функций:

$$\int_0^t \sigma_0\varphi_{\sigma;\ t-0}d\theta = E_\infty\int_0^t \varepsilon_0\varphi_{\varepsilon;\ t-0}d\theta. \quad (7)$$

С учетом взаимосвязи модуля и податливости

$$E_\infty = E_\infty^{+0,5}D_\infty^{-0,5} = D_\infty^{-1}.$$

Указанная симметрия с особой четкостью ощущается при символической записи сверток в (6) и (7) [9]:

$$D_\infty^{0,5}\sigma_t\varphi'_{\sigma t} = E_\infty^{0,5}\varepsilon_t\varphi'_{\varepsilon t}, \quad (8)$$

$$D_\infty^{0,5}\sigma_t\varphi_{\sigma t} = E_\infty^{0,5}\varepsilon_t\varphi_{\varepsilon t}. \quad (9)$$

При использовании операционного исчисления [9] по аналогии с ситуацией линейной вязкоупругости [6] получается, что (1) и (2) приводятся к следующему символическому виду:

$$\sigma_t\cdot 1 = \varepsilon_t E_{\varepsilon t} \text{ и } \varepsilon_t\cdot 1 = \sigma_t D_{\sigma t}. \quad (10)$$

Продолжая пользоваться свойствами свертки [9], для обоих уравнений (10) получим идентичную символическую запись при $\sigma = \text{const}$ и при $\varepsilon = \text{const}$ соответственно:

$$D_{\sigma t}E_{\varepsilon t} = 1\cdot 1 = t \text{ или } \frac{\partial}{\partial t}(D_{\sigma t}E_{\varepsilon t}) = 1. \quad (11)$$

Из (11) видна определенная символическая симметрия модуля и податливости. Уравнение (11) можно получить также непосредственно из (1) или (2).

В сочетании с (11) каждое из уравнений (10) приводится к одинаковому символическому виду

$$\sigma_t\sigma_t D_{\sigma t} = \varepsilon_t\varepsilon_t E_{\varepsilon t} \qquad (12)$$

или

$$\{\sigma_t\}\{D_{\sigma t}\}^{0,5} = \{\varepsilon_t\}\{E_{\varepsilon t}\}^{0,5}, \qquad (13)$$

где $\{\sigma_t\} = \int_0^\infty \sigma_t \exp(-pt)dt$, то есть σ_t – оригинал, $\{\sigma_t\}$ – его Лапласово изображение в символическом виде [6, 9].

Из получившегося совпадения "самостоятельных" записей (1) и (2) в виде (12) или (13) следует вывод об адекватности уравнений (1) и (2) несмотря на их индивидуальное появление [6, 7]. При переходе от (1) и (2) к (10...12) или (13) осуществлялись действия такие же, как и в случае линейной вязкоупругости [6]. Вместе с тем подчеркнем, что при обратном ходе от (13) к (1) и (2) в рассматриваемой ситуации нелинейной вязкоупругости не следует пользоваться двойственным правилом дифференцирования интеграла-свертки [9], а дифференцировать лишь переменные $E_{\varepsilon t}$ и $D_{\sigma t}$. В связи с этим из (13) без каких-либо дополнений можно получить любое из предыдущих уравнений кроме (4) и (5). В сочетании же с (4) и (5) получаются (6) и (7). Следовательно, уравнение (13) можно называть каноническим, а (6) и (7) – его упрощенными вариантами. Это ограничение является следствием специфики получения формул (1) и (2), состоящей в том, что величины ε_1 и σ_1 оказывают непосредственное действие на среднестатистические времена релаксации и запаздывания [6, 7]. При дифференцировании же модуля и податливости величины деформации и напряжения выполняют роль параметров и, таким образом, операциям дифференцирования по времени эти параметры не препятствуют [6, 7].

Очевидно, что из (13), так же, как и из (1) и (2), получается, что при $t \ll \tau$

$$D_0^{0,5}\sigma_t \approx \varepsilon_t E_0^{0,5}, \text{ то есть } \sigma_t \approx E_0\varepsilon_t, \qquad (14)$$

а при $t \gg \tau$

$$D_0^{0,5}\sigma_t \approx E_\infty^{0,5}\varepsilon_t, \text{ то есть } \sigma_t \approx E_\infty\varepsilon_t. \qquad (15)$$

При $\sigma = \text{const}$ из (6) для ползучести имеем

$$\varphi_{\sigma t} = E_\infty\sigma^{-1}\int_0^t \varepsilon_{\sigma\theta}\varphi'_{\varepsilon;\ t-\theta}d\theta = E_\infty\int_0^t D_{\sigma\theta}\varphi'_{\varepsilon;\ t-\theta}d\theta, \qquad (16)$$

а при $\varepsilon = \text{const}$ – для релаксации

$$\varphi_{\varepsilon t} = E_\infty^{-1}\varepsilon^{-1}\int_0^t \sigma_{\varepsilon\theta}\varphi'_{\sigma;\ t-\theta}d\theta = E_\infty^{-1}\int_0^t E_{\varepsilon\theta}\varphi'_{\sigma;\ t-\theta}d\theta. \qquad (17)$$

Как из (16), так и из (17) вытекает, что при $t \ll \tau$, где τ – время релаксации или запаздывания [4...7] $E_0\varphi_{\sigma t} \approx E_\infty\varphi_{\varepsilon t}$, то есть $\varphi_{\sigma t} \to c\varphi_{\varepsilon t} \to 0$. При $t \gg \tau$ $\varphi_{\varepsilon t} \to \varphi_{\sigma t} \to 1$.

Следовательно, при переходе от линейно-наследственной к нелинейно-наследственной вязкоупругости в каноническом уравнении (12) или (13) – так же, как и в простых вариантах записи (1) и (2) – в ядрах интегралов-сверток добавляются лишь индексы, отражающие активирующий характер действия деформации или напряжения на среднестатистические времена релаксации или запаздывания. Такая специфика физической интерпретации нелинейно-наследственных ядер накладывает определенные ограничения на процедуры дифференцирования интегралов-сверток при переходе от символических записей (12), (9), (8) к развернутым записям (1), (2), (7) и (6) соответственно. Становится очевидным, что уравнения линейно-наследственной вязкоупругости можно рассматривать как частный случай общего канонического уравнения (13). Формальная симметрия между наследственными ядрами релаксации и ползучести в уравнениях (13), (12), (11), (9) и (8) в сочетании с "самостоятельностью" каждого из этих ядер при получении обобщенного уравнения (13) обусловливают "правомочность" среднестатистических времен релаксации и запаздывания с точки зрения их физической интерпретации. Из такой особенности следует, что отыскание численных значений вязкоупругих характеристик целесообразно проводить посредством совместной обработки "семейств" релаксации и ползучести [7], а для контроля и уточнения получаемых численных значений следует воспользоваться критерием (11) и диаграммами растяжения в диапазоне скоростей. С этой целью для вычисления интегралов наследственного типа разработаны наиболее рациональные методики [7]. К особенностям анализируемых высокоориентированных полимеров можно отнести также и то, что ядро релаксации как функция от логарифма приведенного времени практически совпадает со спектром релаксации в аналогичном инвариантном виде [7] по отношению к величине деформации.

Таким образом, показано, что при соблюдении определенных условий, связанных с активирующим характером механического воздействия на времена релаксации и запаздывания, в развиваемом варианте теории нелинейной вязкоупругости оказывается приемлемым ряд приемов операционного исчисления, применяемых в теории линейной вязкоупругости. Получаемые уравнения рекомендуется использовать для уточнения среднестатистических времен релаксации и запаздывания, а также других вязкоупругих характеристик.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Ферри Дж.* Вязкоупругие свойства полимеров. –М., 1963.

2. *Александров А.П.* Морозостойкость высокомолекулярных соединений//Тр.I и II конф. по высокомолекулярным соединениям. –М., АН СССР, 1945. С.49...59.

3. *Гуревич Г.И.* //Журнал технической физики. – 1947, №12, 17. С.1491...1502.

4. *Сталевич А.М.* //Изв. вузов. Технология текстильной промышленности. –1980, №3. С.106...107.

5. *Сталевич А.М.* //Проблемы прочности. – 1981, №12. С.95...98.

6. *Сталевич А.М.* Деформирование высокоориентированных полимеров. Ч.1. Теория линейной вязкоупругости: Конспект лекций/СПбГУТиД. – С.-Пб., 1995.

7. *Сталевич А.М.* Деформирование высокоориентированных полимеров. Ч.2. Теория нелинейной вязкоупругости: Конспект лекций/СПбГУТиД. – С.-Пб., 1997.

8. *Екельчик В.С., Рябов В.М.* //Механика композитных материалов. –1981, №3. С.393...404.

9. *Штокало И.З.* Операционное исчисление. – Киев: Наукова думка, 1972.

Рекомендована кафедрой сопротивления материалов. Поступила 18.05.00.