УДК 677.021

ТЕХНОЛОГИЧЕСКИ ОПТИМАЛЬНЫЙ ПРОФИЛЬ РАБОЧЕЙ ПОВЕРХНОСТИ ВОРОНКИ ДЛЯ ФОРМИРОВАНИЯ ВОЛОКНИСТОЙ ЛЕНТЫ

Ф.Р. КАХРАМАНОВ, И.В. ФРОЛОВА, Н.Г. ЧИСТОБОРОДОВА

(Ивановская государственная текстильная академия, Московский государственный текстильный университет им. А.Н. Косыгина)

Технологическая задача определения рабочего профиля поверхности воронки связана с обрабатываемой волокнистой массой, проходящей через воронку, и выжимаемого из нее воздушного потока от оси симметрии к периферии рабочей поверхности.

Для решения этой задачи применяли уравнение материального баланса

$$\frac{d}{dx} P(x) \frac{dc}{dx} = \frac{\xi}{\mu} \sqrt{1 + \left(\frac{dP}{dx}\right)^2}\, c, \qquad (1)$$

где ξ – воздухопроницаемость; μ – вязкость воздушного потока; c – концентрация воздушного потока по периферии рабочей поверхности воронки.

Координата x изменяется вдоль поверхности рабочего профиля воронки (рис.1, где 1 – волокнистая масса с воздушным потоком; 2 – отвод вследствие воздухопроницаемости; 3 – подвод выжимаемого воздушного потока из формируемой волокнистой массы от центра симметрии к периферии рабочей поверхности воронки).

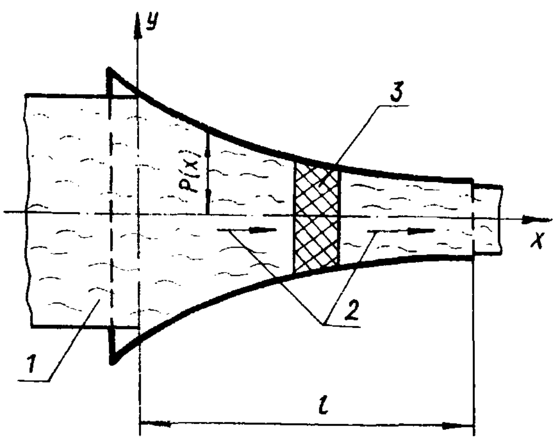

Рис. 1

Считаем, что величина $(dP/dx)^2$ в уравнении (1) мала по сравнению с единицей. Тогда (1) запишется в виде

$$\frac{d}{dx} P(x) \frac{dc}{dx} = c \frac{\xi}{\mu}. \qquad (2)$$

Полное количество воздуха, уходящего из волокнистой массы в зону рабочей поверхности 3 воронки в единицу времени, равняется

$$j = 2\int_0^l \xi c dx, \qquad (3)$$

где l – длина воронки.

Максимально допустимый отвод воздуха от центра симметрии волокнистой массы 2 к периферии рабочей поверхности воронки вычислим по формуле

$$M_в = 2\varrho\int_0^l P(x)dx, \qquad (4)$$

Максимально допустимый отвод воздуха при ограничении известной волокнистой массы найдем методом неопределенных множителей Лагранжа. В частности, будем искать одну из функций P(x) или c(x) со стационарным значением интеграла:

$$j' = \int_0^l [2\mu c + 2\lambda\varrho P(x)]dx, \qquad (5)$$

где λ – множитель Лагранжа, по которому рассматриваются симметрично все значения x.

Интегрируя уравнение (5), получаем равенство

$$-P(x)\frac{dc}{dx} = \frac{\xi}{\mu}\int_x^l c dy, \qquad (6)$$

где не учитывается, что какая-то часть воздушного потока остается в основной волокнистой массе.

Решая (6) относительно P(x) и подставляя в (5), имеем

$$j' = 2\int_0^l \left[\mu c - \frac{\lambda\varrho\mu}{\xi}\left(\frac{dc}{dx}\right)^{-1}\int_0^l c dy\right]dx. \qquad (7)$$

Отсюда путем вариации найдем оптимальное распределение воздушного потока при заданной длине l воронки:

$$c'(x) = c(x) + \varepsilon\varphi(x), \qquad (8)$$

где функция $\varphi(x)$ имеет непрерывную производную в интервале от 0 до 1 с граничным условием $\varphi(0) = 0$, так как концентрация воздушного потока у рабочей стенки воронки может быть задана.

С учетом выражений (7) и (8) после разложения в ряд по степеням ε получим

$$\delta j = 2\int_0^l \varepsilon\left[\mu\varphi + \frac{\lambda\varrho\mu}{\xi}\frac{\varphi_x}{(c_x)^2}\int_x^l c dy - \frac{\lambda\varrho\mu}{\xi}\frac{1}{c_x}\int_x^l \varphi' dy\right]dx, \qquad (9)$$

где φ_x и c_x – производные от φ и c по x.

После интегрирования уравнение (9) переходит в равенство

$$\delta j = 2\varepsilon\int_0^l \left[\mu + \frac{\lambda\varrho\mu}{\xi}\frac{2\frac{d^2c}{dx^2}}{\left(\frac{dc}{dx}\right)^3}\int_x^l c dy + \frac{\lambda\varrho\mu c}{\xi\left(\frac{dc}{dx}\right)^2} - \frac{\lambda\varrho\mu}{\xi}\int_0^x\left(\frac{dc}{dx}\right)^{-1}dy\right]\varphi dx, \qquad (10)$$

которому соответствует уравнение Эйлера–Лагранжа:

$$\mu+\frac{\lambda\varrho\mu}{\xi}\left[\frac{2\frac{d^2c}{dx^2}}{\left(\frac{dc}{dx}\right)^3}\int\limits_x^l c dy+\frac{c}{\left(\frac{dc}{dx}\right)^2}-\int\limits_0^x\frac{dy}{\frac{dc}{dx}}\right]=0. \qquad (11)$$

Уравнению (11) удовлетворяет функция

$$c(x)=1-\sqrt{\frac{\lambda\varrho}{\xi}}x, \qquad (12)$$

эквивалентная системе обыкновенных дифференциальных уравнений:

$$\begin{aligned}&(pc_x)_x=\mu/\xi c=0;\\&(pc_x)_{xx}-\mu/\xi c_x=0.\end{aligned} \qquad (13)$$

Функция (12) является частным решением дифференциальных уравнений (13).

Тогда форма рабочего профиля воронки определяется по формуле

$$P(x)=-\left[\left(\frac{dc}{dx}\right)^{-1}\int\limits_x^l c dy\right]\frac{\mu}{\xi}=$$

$$=\frac{\mu}{\xi a}\left(\frac{ax^2}{2}+x-\frac{al^2}{2}-l\right), \qquad (14)$$

где $a=-\sqrt{-\lambda\varrho/\xi}$.

При этом неопределенный множитель Лагранжа выбирается таким образом, чтобы волокнистая масса, проходящая через воронку, была равна заданной массе.

Отсюда

$$\frac{M}{2\varrho}=\int\limits_0^l P(x)dx=-\frac{\mu l^2}{3\xi}-\frac{\mu c^2}{2\xi a}. \qquad (15)$$

Решая (15) относительно а, получаем

$$a=-\frac{1}{\frac{M\xi}{\varrho\mu l^2}+\frac{2l}{3}}. \qquad (16)$$

Параметр а определяет физическую сущность технологического процесса и зависит от длины воронки l, которая приводит к максимальному распределению энергии по рабочей поверхности воронки, определяющейся из формулы

$$j=2\mu\int\limits_0^l c dx. \qquad (17)$$

После интегрирования (17) с учетом (12) получаем

$$j=2\mu\left(l-\frac{1}{2}\frac{3\varrho\mu l^4}{3M\xi+2\varrho\mu l^3}\right). \qquad (18)$$

Значение l, соответствующее максимальному значению j, находим из уравнения

$$\frac{\partial j}{\partial l}=2\mu\left(1-\frac{6\varrho\mu l^3}{3M\xi+2\varrho\mu l^3}+\frac{9\varrho^2\mu^2 l^2}{\left(3M\xi+2\varrho\mu l^3\right)^2}\right)=0. \qquad (19)$$

Решая (19) относительно l, имеем

$$l=\sqrt[3]{\frac{3M\xi}{\varrho\mu}}.$$

ВЫВОДЫ

Найдена формула рабочего профиля воронки с учетом максимального отвода воздушного потока из волокнистой массы к рабочей периферийной поверхности и определена длина воронки.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Duffin R.J.* // J. Math. Mech. – B.P.47 (1959).

Рекомендована кафедрой начертательной геометрии и черчения ИГТА. Поступила 01.02.00.