

УДК 677.057

DOI 10.47367/0021-3497\_2021\_4\_153

**АНАЛИТИЧЕСКОЕ ОПИСАНИЕ ФОРМЫ КРИВЫХ КОНТАКТА ВАЛКОВ  
В ДВУХВАЛКОВОМ МОДУЛЕ**

**ANALYTICAL DESCRIPTION OF THE CONTACT CURVE SHAPE  
OF THE ROLLS IN THE TWO-ROLLER MODULE**

*Ш.Р. ХУРРАМОВ*

*SH.R. KHURRAMOV*

(Ташкентский архитектурно-строительный институт, Республика Узбекистан,  
Институт механики и сейсмостойкости сооружений  
им.М.Т.Уразбаева АН Республики Узбекистан)

(Tashkent Institute of Architecture and Civil Engineering, Republic of Uzbekistan,  
Institute of Mechanics and Seismic Resistance of Structures  
named after M.T. Urazbaev of the Academy of Sciences of the Republic of Uzbekistan)

E-mail: shavkat-xurramov59@mail.ru

*В статье приведены результаты аналитического описания формы кривых контакта валков в двухвалковом модуле. Найдены уравнения кривых контакта валков в случае, когда деформационные свойства контактирующих тел описаны эмпирическими степенными зависимостями. Выявлено, что эти кривые описывают все частные случаи взаимодействия обрабатываемого материала с парами валков в двухвалковых модулях.*

*The article presents the results of analytical description of the contact curve shape of the rolls in the two-roller module. Equations for the curve contact of the rolls are found under conditions of the deformation properties of the contacting bodies being described by empirical power dependences. These curves were revealed to describe all special cases of interaction of the processed material with pairs of rolls in two-roll modules.*

**Ключевые слова:** двухвалковый модуль, кривые контакта валков, уравнения кривых контакта валков.

**Keywords:** two-roll module, the curve contact of the rolls, equations for the curve contact of the rolls.

Одной из основных задач теории контактного взаимодействия двухвалковых модулей является аналитическое описание формы кривых контакта валков.

Аналитическое описание формы кривых контакта валков в случае, когда валки имеют эластичные покрытия, представляет собой достаточно сложную задачу. Точная форма кривых контакта в этом случае пока не выяснена. Поэтому задачи контактного взаимодействия, например, анализ напряженного состояния в двухвалковом модуле, решается на основе предварительного выбора формулы кривой контакта валков. Обычно применяют дугу окружности, эллипса и параболу, которые описываются формулой  $r = \frac{a}{1 + e \cos \theta}$  [1], или простые механические модели, определяемые уравнениями  $r=R$  и  $r = \frac{R \cos \phi}{\cos \theta}$  [2].

Рассматриваем асимметричный двухвалковый модуль, в котором валки расположены относительно вертикали наклоном справа, имеют неравные диаметры и эластичные покрытия из материалов с различными жесткостями, слой материала имеет равномерную толщину и подан наклоном вниз относительно линии центров (рис. 1 – схема взаимодействия в двухвалковом модуле).

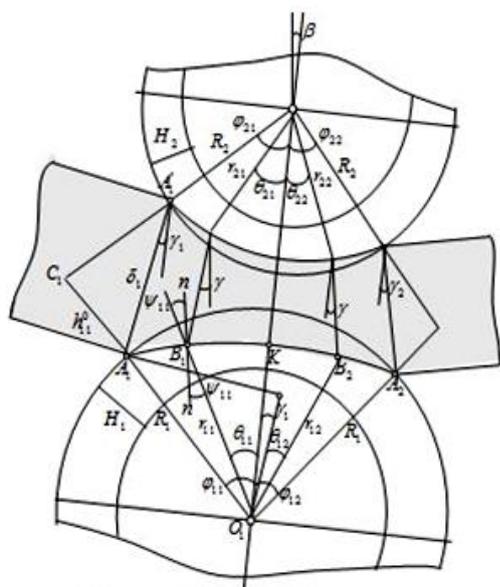


Рис. 1

Формы кривых контакта валков в первую очередь зависят от деформационных свойств обрабатываемого материала и покрытия валков, то есть от деформирования контактирующих тел двухвалковых модулей.

Накоплено большое количество экспериментальных данных о деформировании контактирующих тел двухвалковых модулей, таких как кожа, ткани, хлопок, бумага, резина, шерсть, техническое сукно и другие. Анализ этих данных показал, деформационные свойства таких материалов могут быть описаны либо эмпирической зависимостью "напряжения – относительная деформация", либо реологической моделью, учитывающей упругость по Гуку, вязкость по Ньютону и пластичность по Сен-Венану.

Данная работа посвящена аналитическому описанию формы кривых контакта валков в случае, когда деформирования контактирующих тел заданы эмпирическими зависимостями "напряжения – относительная деформация".

Для описания деформирования контактирующих тел в двухвалковых модулях используют различные эмпирические формулы. Среди этих формул, ввиду своей простоты и достаточно хорошего соответствия опытным данным, наиболее используемой является степенной закон связи напряжений и деформаций  $\sigma = A\varepsilon^n$ , где  $A, n$  – коэффициенты деформирования и упрочнения. Изменения коэффициента упрочнения  $n$  от единицы до бесконечности соответствуют широкому диапазону моделей материалов от линейно упругого до жестко-идеально-пластического [3].

Рассмотрим взаимодействия слоя материала с нижним валком. Кривая контакта нижнего ( $i=1$ ) валка (кривая  $A_1A_2$ ) состоит из участков сжатия ( $j=1$ )  $A_1K$  и восстановления ( $j=2$ )  $KA_2$ , где  $K$  – точка кривого контакта нижнего валка, лежащая на линии центров (прямой, соединяющей центров валков) (рис. 1). Точка  $B_1$  участка  $A_1K$  определяется полярными координатами  $r_{11}$  и  $\theta_{11}$ , а точка  $B_2$  участка  $KA_2$  –  $r_{12}$  и  $\theta_{12}$ .

Согласно рис. 1:

$$-\phi_{11} \leq \theta_{11} \leq 0, \quad 0 \leq \theta_{12} \leq \phi_{12}. \quad (1)$$

В процессе взаимодействия с валками изменения угла наклона слоя материала относительно линии центров выражаются зависимостями [4]:

$$\begin{aligned} \gamma &= \frac{\gamma_1 \theta_{11}}{\phi_{11}}, \quad -\phi_{11} \leq \theta_{11} \leq 0, \\ \gamma &= \frac{\gamma_2 \theta_{12}}{\phi_{12}}, \quad 0 \leq \theta_{12} \leq \phi_{12}. \end{aligned} \quad (2)$$

Пусть деформационные свойства покрытия нижнего валка и слоя материала при сжатии заданы формулами

$$\sigma_{11} = A_{11} \varepsilon_{11}^{n_{11}}, \quad \sigma_{11}^* = B_1 \varepsilon_{11}^{*m_1}, \quad (3)$$

где  $\sigma_{11}, \varepsilon_{11}, A_{11}, n_{11}, \sigma_{11}^*, \varepsilon_{11}^*, B_1, m_1$  – напряжения, деформация, коэффициенты деформирования и упрочнения покрытия нижнего валка и слоя материала при сжатии.

В точках кривой контакта нижнего валка деформация контактирующих тел будет происходить по нормали n-n. Поэтому в каждой точке участка  $A_1K$  выполняется условие  $\frac{\sigma_{11}}{\cos \psi} = \frac{\sigma_{11}^*}{\cos \psi}$ , где  $\psi$  – угол между радиусом  $r_{11}$  и линией n-n. Отсюда имеем  $\sigma_{11} = \sigma_{11}^*$ .

Тогда из равенств (3) получаем:

$$A_{11} \varepsilon_{11}^{n_{11}} = B_1 \varepsilon_{11}^{*m_1}. \quad (4)$$

Контактное взаимодействие в двухвалковых модулях с валками, имеющими эластичные покрытия, можно рассматривать по аналогии с качением эластичного колеса по деформируемому грунту [2]. В теории качения колеса аналитическое описание формы линии контакта эластичного колеса с деформируемым грунтом связывают с соотношением скоростей деформирования контактирующих тел [5], [6].

Исходя из вышесказанного, считаем:

$$\frac{d\varepsilon_{11}}{dt} = \lambda_{11} \frac{d\varepsilon_{11}^*}{dt}. \quad (5)$$

Продифференцировав обе части равенства (4), находим:

$$n_{11} A_{11} \varepsilon_{11}^{n_{11}-1} \frac{d\varepsilon_{11}}{dt} = m_1 B_1 \varepsilon_{11}^{*m_1-1} \frac{d\varepsilon_{11}^*}{dt}.$$

Отсюда с учетом равенств (4) и (5) имеем:

$$\frac{\varepsilon_{11}}{\varepsilon_{11}^*} = \frac{n_{11}}{m_1} \lambda_{11}. \quad (6)$$

Согласно рис. 1 относительные деформации контактирующих тел имеют вид:

$$\varepsilon_{11} = \frac{R_1 - r_{11}}{H_1}, \quad \varepsilon_{11}^* = \frac{r_{11} - R_1 \frac{\cos(\phi_{11} - \gamma)}{\cos(\theta_{11} + \gamma)}}{h_{11}^0}, \quad (7)$$

где  $H_1$  – толщина эластичного покрытия нижнего валка;

$$h_{11}^0 = \delta_1 \frac{\sin(\phi_{21} - \gamma_1)}{\sin(\phi_{11} + \phi_{21})}. \quad (8)$$

Из равенства (6) с учетом выражения (7) находим:

$$R_1 - r_{11} = k_{11} \lambda_{11} \left( r_{11} - R_1 \frac{\cos(\phi_{11} - \gamma)}{\cos(\theta_{11} + \gamma)} \right), \quad (9)$$

где  $k_{11} = \frac{n_{11} H_1 \sin(\phi_{11} + \phi_{21})}{m_1 \delta_1 \sin(\phi_{21} - \gamma_1)}$ ;  $\lambda_{11}$  – соотношение скоростей относительных деформаций эластичного покрытия нижнего валка и слоя материала при сжатии.

Решив равенства (9) относительно  $r_{11}$ , найдем уравнение кривой контакта участка  $A_1K$  и с учетом выражения (2) получим:

$$r_{11} = \frac{R_1}{1+k_{11}\lambda_{11}} \left( 1 + k_{11}\lambda_{11} \frac{\cos(\phi_{11} - \gamma)}{\cos(\theta_{11} + \gamma)} \right), \quad \gamma = \frac{\gamma_1\theta_{11}}{\phi_{11}}, \quad -\phi_{11} \leq \theta_{11} \leq 0. \quad (10)$$

Аналогично формуле (10) находим уравнение кривой контакта участка КА<sub>2</sub>:

$$r_{12} = \frac{R_1}{1+k_{12}\lambda_{12}} \left( 1 + k_{12}\lambda_{12} \frac{\cos(\phi_{12} + \gamma)}{\cos(\theta_{12} + \gamma)} \right), \quad \gamma = \frac{\gamma_2\theta_{12}}{\phi_{12}}, \quad 0 \leq \theta_{12} \leq \phi_{12}, \quad (11)$$

где  $k_{12} = \frac{n_{12}H_1 \sin(\phi_{12} + \phi_{22})}{m_2\delta_2 \sin(\phi_{22} - \gamma_2)}$ ;  $\lambda_{12}$  – соотношение скоростей относительных деформаций

эластичного покрытия нижнего валка и слоя материала при восстановлении.

Обобщая уравнения (10) и (11), найдем уравнения кривой контакта нижнего валка:

$$\begin{cases} r_{11} = \frac{R_1}{1+k_{11}\lambda_{11}} \left( 1 + k_{11}\lambda_{11} \frac{\cos(\phi_{11} - \gamma)}{\cos(\theta_{11} + \gamma)} \right), & \gamma = \frac{\gamma_1\theta_{11}}{\phi_{11}}, \quad -\phi_{11} \leq \theta_{11} \leq 0, \\ r_{12} = \frac{R_1}{1+k_{12}\lambda_{12}} \left( 1 + k_{12}\lambda_{12} \frac{\cos(\phi_{12} + \gamma)}{\cos(\theta_{12} + \gamma)} \right), & \gamma = \frac{\gamma_2\theta_{12}}{\phi_{12}}, \quad 0 \leq \theta_{12} \leq \phi_{12}. \end{cases} \quad (12)$$

По аналогии определения уравнения кривой контакта нижнего валка, опреде-

ляем уравнения кривой контакта верхнего валка:

$$\begin{cases} r_{21} = \frac{R_2}{1+k_{21}\lambda_{21}} \left( 1 + k_{21}\lambda_{21} \frac{\cos(\phi_{21} + \gamma)}{\cos(\theta_{21} - \gamma)} \right), & \gamma = \frac{\gamma_1\theta_{21}}{\phi_{21}}, \quad -\phi_{21} \leq \theta_{21} \leq 0, \\ r_{22} = \frac{R_2}{1+k_{22}\lambda_{22}} \left( 1 + k_{22}\lambda_{22} \frac{\cos(\phi_{22} - \gamma)}{\cos(\theta_{22} - \gamma)} \right), & \gamma = \frac{\gamma_2\theta_{22}}{\phi_{22}}, \quad 0 \leq \theta_{22} \leq \phi_{22}, \end{cases} \quad (13)$$

где  $k_{21} = \frac{n_{21}H_2 \sin(\phi_{11} + \phi_{21})}{m_1\delta_1 \sin(\phi_{11} + \gamma_1)}$ ;

$k_{22} = \frac{n_{22}H_2 \sin(\phi_{12} + \phi_{22})}{m_2\delta_2 \sin(\phi_{12} + \gamma_2)}$ ;

$\lambda_{21}$ ,  $\lambda_{22}$  – соотношение скоростей относительных деформаций эластичного покрытия верхнего валка и слоя материала при сжатии и восстановлении соответственно.

Для любого времени  $t$  в зоне сжатия нижнего валка имеют место соотношения:

$$\Delta r_{11} + \Delta h_{11} = \Delta \ell_{11}, \quad (14)$$

$$\varepsilon_{11} = \frac{\Delta r_{11}}{H_1}, \quad \varepsilon_{11}^* = \frac{\Delta h_{11}}{h_{11}^0}, \quad \frac{d\varepsilon_{11}}{dt} = \frac{1}{H_1} \frac{dr_{11}}{dt},$$

$$\frac{d\varepsilon_{11}^*}{dt} = \frac{i}{h_{11}^0} \frac{dh_{11}}{dt}. \quad (15)$$

Подставляем выражения относительных деформаций из зависимостей (15) в равенства (4) и преобразуем ее:

$$\begin{aligned} A_{11} \left( \frac{\Delta r_{11}}{H_1} \right)^{n_{11}} &= B_1 \left( \frac{\Delta h_{11}}{h_{11}^0} \right)^{m_1}, \quad A_{11} \left( 1 - \frac{H_1 - \Delta r_{11}}{H_1} \right)^{n_{11}} = B_1 \left( 1 - \frac{h_{11}^0 - \Delta h_{11}}{h_{11}^0} \right)^{m_1}, \\ A_{11} \left( 1 - n_{11} \frac{H_1 - \Delta r_{11}}{H_1} \right) &= B_1 \left( 1 - m_1 \frac{h_{11}^0 - \Delta h_{11}}{h_{11}^0} \right), \\ A_{11} ((1 - n_{11})H_1 + n_{11}\Delta r_{11}) h_{11}^0 &= B_1 ((1 - m_1)h_{11}^0 + m_1\Delta h_{11}) H_1. \end{aligned} \quad (16)$$

Заметим, что

$$\lambda_{11} = \frac{\frac{d\varepsilon_{11}}{dt}}{\frac{d\varepsilon_{11}^*}{dt}} = \frac{\frac{dr_{11}}{H_1}}{\frac{dh_{11}}{h_{11}^0}} \approx \frac{h_{11}^0 \Delta r_{11}}{H_1 \Delta h_{11}}.$$

Учитывая это, из равенства (14) имеем:

$$\Delta r_{11} = \frac{H_1 \lambda_{11}}{h_{11}^0 + H_1 \lambda_{11}} \Delta \ell_{11}, \quad \Delta h_{11} = \frac{h_{11}^0}{h_{11}^0 + H_1 \lambda_{11}} \Delta \ell_{11}.$$

Подставим эти выражения  $\Delta r_{11}$  и  $\Delta h_{11}$  в равенства (16) и после преобразования ее находим:

$$(\Delta \ell_{11})_{\text{cp}} = \frac{1}{\phi_{11} - \phi_{11}} \int_{\phi_{11}}^0 R_1 \left( 1 - \frac{\cos(\phi_{11} + \gamma_1)}{\cos(\theta_{11} + \gamma)} \right) d\theta_{11},$$

или после интегрирования

$$(\Delta \ell_{11})_{\text{cp}} = R_1 \left( 1 - \frac{\cos(\phi_{11} + \gamma_1)}{2(\phi_{11} + \gamma_1)} \ln \left| \frac{1 + \sin(\phi_{11} + \gamma_1)}{1 - \sin(\phi_{11} + \gamma_1)} \right| \right). \quad (19)$$

Таким образом, соотношение скоростей деформации покрытия нижнего вала и

слоя материала в зоне сжатия определяется по формуле:

$$\lambda_{11} = \frac{B_1 m_1 (\Delta \ell_{11})_{\text{cp}} - (A_{11}(1 - n_{11}) - B_1(1 - m_1)) h_{11}^0}{A_{11} n_{11} (\Delta \ell_{11})_{\text{cp}} + (A_{11}(1 - n_{11}) - B_1(1 - m_1)) H_1}, \quad (20)$$

где  $h_{11}^0 = \delta_1 \frac{\sin(\phi_{21} - \gamma_1)}{\sin(\phi_{11} + \phi_{21})}$ ;

$$(\Delta \ell_{11})_{\text{cp}} = R_1 \left( 1 - \frac{\cos(\phi_{11} + \gamma_1)}{2(\phi_{11} + \gamma_1)} \ln \left| \frac{1 + \sin(\phi_{11} + \gamma_1)}{1 - \sin(\phi_{11} + \gamma_1)} \right| \right).$$

Остальные соотношения скоростей деформации в двухвалковом модуле определяем аналогично.

Они имеют вид:

$$\lambda_{12} = \frac{B_2 m_2 (\Delta \ell_{12})_{\text{cp}} - (A_{12}(1 - n_{12}) - B_2(1 - m_2)) h_{12}^0}{A_{12} n_{12} (\Delta \ell_{12})_{\text{cp}} + (A_{12}(1 - n_{12}) - B_2(1 - m_2)) H_1}, \quad (21)$$

где  $h_{12}^0 = \delta_2 \frac{\sin(\phi_{22} - \gamma_2)}{\sin(\phi_{12} + \phi_{22})}$ ;  $(\Delta \ell_{12})_{\text{cp}} = R_1 \left( 1 - \frac{\cos(\phi_{12} + \gamma_2)}{2(\phi_{12} + \gamma_2)} \ln \left| \frac{1 + \sin(\phi_{12} + \gamma_2)}{1 - \sin(\phi_{12} + \gamma_2)} \right| \right)$ ;

$$\lambda_{21} = \frac{B_1 m_1 (\Delta \ell_{21})_{\text{cp}} - (A_{21}(1 - n_{21}) - B_1(1 - m_1)) h_{21}^0}{A_{21} n_{21} (\Delta \ell_{21})_{\text{cp}} + (A_{21}(1 - n_{21}) - B_1(1 - m_1)) H_2}, \quad (22)$$

$$\lambda_{11} = \frac{B_1 m_1 \Delta \ell_{11} - (A_{11}(1 - n_{11}) - B_1(1 - m_1)) h_{11}^0}{A_{11} n_{11} \Delta \ell_{11} + (A_{11}(1 - n_{11}) - B_1(1 - m_1)) H_1}. \quad (17)$$

Из равенства (14) с учетом выражений (7) и (15) находим:

$$\Delta \ell_{11} = R_1 \left( 1 - \frac{\cos(\phi_{11} - \gamma)}{\cos(\theta_{11} + \gamma)} \right). \quad (18)$$

Расчеты  $\lambda_{11}$  по формуле (17) можно упростить выражением  $\Delta \ell_{11}$ , определяемой выражением (18), заменой средним значением.

Среднее значения  $(\Delta \ell_{11})_{\text{cp}}$  определим в соответствии с теоремой о среднем интегрального исчисления, заменяя при этом выражение  $\cos(\phi_{11} - \gamma)$  с выражением  $\cos(\phi_{11} + \gamma_1)$ :

$$\text{где } h_{21}^0 = \delta_1 \frac{\sin(\phi_{11} + \gamma_1)}{\sin(\phi_{11} + \phi_{21})}; (\Delta \ell_{21})_{\text{cp}} = R_2 \left( 1 - \frac{\cos(\phi_{21} - \gamma_1)}{2(\phi_{21} - \gamma_1)} \ln \left| \frac{1 + \sin(\phi_{21} - \gamma_1)}{1 - \sin(\phi_{21} - \gamma_1)} \right| \right);$$

$$\lambda_{22} = \frac{B_2 m_2 (\Delta \ell_{22})_{\text{cp}} - (A_{22}(1 - n_{22}) - B_2(1 - m_2)) h_{22}^0}{A_{22} n_{22} (\Delta \ell_{22})_{\text{cp}} + (A_{22}(1 - n_{22}) - B_2(1 - m_2)) H_2}, \quad (23)$$

$$\text{где } h_{22}^0 = \delta_2 \frac{\sin(\phi_{12} + \gamma_2)}{\sin(\phi_{12} + \phi_{22})};$$

$$(\Delta \ell_{22})_{\text{cp}} = R_2 \left( 1 - \frac{\cos(\phi_{22} - \gamma_2)}{2(\phi_{22} - \gamma_2)} \ln \left| \frac{1 + \sin(\phi_{22} - \gamma_2)}{1 - \sin(\phi_{22} - \gamma_2)} \right| \right).$$

Таким образом, получены выражения (20)...(23), определяющие соотношение скоростей деформации в двухвалковых модулях.

Системы уравнений (12) и (13) описывают кривые контакта валков двухвалкового модуля, представленного на рис. 1. Они являются математическими моделями этих кривых в случае, когда деформационные свойства контактирующих тел описаны эмпирическими степенными зависимостями.

## ВЫВОДЫ

1. Получены формулы, описывающие форму кривых контакта валков в асимметричном двухвалковом модуле, в котором валки расположены относительно вертикали наклоном справа, имеют неравные диаметры и эластичные покрытия из материалов с различными жесткостями, слой материала имеет равномерную толщину, подан наклоном вниз относительно линии центров.

2. Проанализированы все частные случаи обобщенного двухвалкового модуля и соответствующие частные виды полученных формул. Выявлено, что полученные формулы являются общими в том смысле, они описывают все частные случаи взаимодействия обрабатываемого материала с парами валков в двухвалковых модулях.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Кузнецов Г.К. и др. Связь напряженного состояния на поверхности контакта с силами, действу-

ющими в валковых механизмах // Изв. вузов. Технология текстильной промышленности. – 1987, №3, С.104...105.

2. Кузнецов Г.К. Исследование и методика проектирования валковых отжимных устройств текстильных машин: Дис. ... докт. техн. наук. – Кострома, 1970.

3. Джонсон К. Механика контактного взаимодействия / Пер. с англ. – М.: Мир, 1989.

4. Хуррамов Ш.Р. и др. К решению некоторых контактных задач двухвалковых модулей. // Вестник Тамбовского ГТУ. – 2019. Том 25, №3. С. 486...499.

5. Водяник И. И. Воздействие ходовых систем на почву. – М.: Агропромиздат, 1990.

6. Хайлис Г. А. Определение глубины колеи и силы сопротивления перекачиванию по почве свободного пневматического колеса. // Достижения науки и техники АПК. – 2006, №4. С. 10...14.

## REFERENCES

1. Kuznetsov G.K. i dr. Svyaz' napryazhennogo sostoyaniya na poverkhnosti kontakta s silami, deystvuyushchimi v valkovykh mekhanizmakh // Izvestiya Vysshikh Uchebnykh Zavedenii, Seriya Tekhnologiya Tekstil'noi Promyshlennosti. – 1987, №3, S.104...105.

2. Kuznetsov G.K. Issledovanie i metodika proektirovaniya valkovykh otzhimnykh ustroystv tekstil'nykh mashin: Dis. ... dokt. tekhn. nauk. – Kostroma, 1970.

3. Dzhonson K. Mekhanika kontaktnogo vzaimodeystviya / Per. s angl. – M.: Mir, 1989.

4. Khurramov Sh.R. i dr. K resheniyu nekotorykh kontaktnykh zadach dvukhvalkovykh moduley. // Vestnik Tambovskogo GTU. – 2019. Tom 25, №3. S.486...499.

5. Vodyanik I. I. Vozdeystvie khodovykh sistem na pochvu. – M.: Agropromizdat, 1990.

6. Khaylis G. A. Opredelenie glubiny kolei i sily soprotivleniya perekatyvaniyu po pochve svobodnogo pnevmaticheskogo kolesa. // Dostizheniya nauki i tekhniki APK. – 2006, №4. S. 10...14.

Рекомендована семинаром лаборатории "Теория механизмов и машин" ИМСС им. М.Т. Уразбаева АН Республики Узбекистан. Поступила 16.06.21.