

УДК 539.3

DOI 10.47367/0021-3497_2021_6_204

**ОСОБЕННОСТИ РАЦИОНАЛЬНОГО ПРОЕКТИРОВАНИЯ
СТРУКТУРЫ НАМОТКИ КОМПОЗИТНЫХ ТРУБ
НА ОСНОВЕ "НИТЯНОЙ МОДЕЛИ"**

**PECULIARITIES OF COMPOSITE TUBES STRUCTURE DESIGN
ON THE BASIS OF "THREAD MODEL"**

А.Н. ПОЛИЛОВ, О.Ю. СКЛЕМИНА

A.N. POLILOV, O.YU. SKLEMINA

(Институт машиноведения им. А.А. Благонравова Российской академии наук)

(Blagonravov Mechanical Engineering Research Institute of Russian Academy of Science)

E-mail: polilovan@mail.ru; sklemina97@yandex.ru

На примере намоточной трубы, материал которой находится в плоском напряженном состоянии, рассмотрена простейшая нитяная модель волокнистого композита, согласно которой все приложенные усилия воспринимаются только равнонапряженными волокнами. Эта модель позволяет определить схемы рационального армирования (углы намотки и толщины слоев), обеспечивающие минимальную массу трубы при удовлетворении условий прочности при заданных внутреннем давлении, осевой силе и крутящем моменте.

Формально, уравнения нитяной модели позволяют выбирать любые углы армирования, но в некоторых случаях определяемые "рациональные" толщины слоев оказываются отрицательными, что выглядит некоторым парадоксом, обсуждаемым в данной статье. Конкретные примеры метода совершенствования структуры армирования на основе нитяной модели приведены для композитных баллонов для сжатого газа.

For the case of wound composite tube with wall at plane stress state the simplest thread model of fiber-reinforced-plastic is considered, and according to this model all applied forces acted on equal-stressed fibers only. This model makes it possible to design optimal structure of reinforcement (angles of wound and thickness of layers) corresponding to minimum mass of tube for satisfaction the strength conditions at a given internal pressure, longitudinal load and torsion moment.

The equations of thread model make it possible to choose any angles of reinforcement, but in some cases the founded "optimum" thicknesses became negative, being a kind of paradox, the latter is discussed in the article. Some examples of reinforcement structure improvement method on the basis of thread model are shown for composite gas tanks.

Ключевые слова: композитная труба, нитяная модель, намотка, напряженное состояние, кручение, толщина слоя, равнонапряженные волокна, нормальные напряжения, касательные напряжения.

Keywords: composite tube, thread model, winding, stress state, torsion, layer thickness, uniformly stressed fibers, normal stresses, shear stresses.

Введение

Трубы и сосуды давления занимают широкую область эффективного применения полимерных волокнистых композитов, и расчетам намоточных труб и баллонов для газового топлива посвящена обширная литература [1...5].

С точки зрения инженерной механики представляет интерес возможность оптимизировать структуру армирования с учетом сложного напряженного состояния, возникающего в стенке композитной трубы или баллона.

Баллоны для газового топлива справедливо считаются потенциально опасными объектами, поэтому большое внимание уделяется методам их проектирования [6], [7] и критериям прочности [8...10] намоточных композитов.

Цель настоящей статьи состоит в обосновании инженерного метода проектирования структуры армирования композитных труб и сосудов давления.

1. Нитяная модель при плоском напряженном состоянии

В качестве примера будем рассматривать композитную трубу, намотанную однонаправленной волокнистой лентой под разными углами α к продольной оси (рис. 1). Если в намотанной под углом α однонаправленной ленте возникают напряжения $\sigma_1, \sigma_2, \tau_{12}$ (локальная ось 1 выбрана

вдоль волокон, а ось 2 – поперек), то их проекции в осях, связанных с трубой, представляются в следующем виде [1], [6]:

$$\begin{aligned}\sigma_{zz} = \sigma_z &= \frac{\sigma_1 + \sigma_2}{2} + \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} \cos 2\alpha + \tau_{12} \sin 2\alpha, \\ \sigma_{\theta\theta} = \sigma_\theta &= \frac{\sigma_1 + \sigma_2}{2} - \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} \cos 2\alpha - \tau_{12} \sin 2\alpha, \\ \sigma_{z\theta} = \tau_{z\theta} &= -\frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} \sin 2\alpha + \tau_{12} \cos 2\alpha.\end{aligned}\quad (1)$$

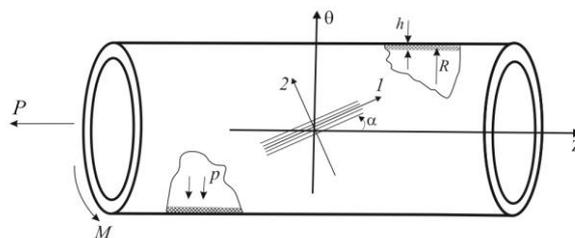


Рис. 1

В нитяной модели считается, что всю нагрузку несут только равнонапряженные волокна, и в них в предельном состоянии достигаются критические напряжения $\sigma_1^* = \sigma_0$. Средние напряжения $\bar{\sigma}_0, \bar{\sigma}_z, \bar{\tau}_{\theta z}$ в трубе получаются суммированием напряжений в m слоях с разной ориентацией α_i ($i=1, \dots, m$), с учетом толщин h_i этих слоев. В силу гипотезы о тонкостенности трубы распределение напряжений в ее стенке можно

считать однородным. В этом случае уравнения (1) принимают вид:

$$\begin{aligned}\bar{\sigma}_\theta &= \sigma_0 \sum_{i=1}^m (h_i \sin^2 \alpha_i), \\ \bar{\sigma}_z &= \sigma_0 \sum_{i=1}^m (h_i \cos^2 \alpha_i), \\ \bar{\tau}_{\theta z} &= \sigma_0 \sum_{i=1}^m (h_i \sin \alpha_i \cos \alpha_i).\end{aligned}\quad (2)$$

При действии внутреннего давления p , продольной силы P и крутящего момента M средние напряжения можно выразить через средний радиус трубы R простейшими формулами:

$$\bar{\sigma}_\theta = \frac{pR}{h}; \quad \bar{\sigma}_z \approx \frac{P}{2\pi Rh}; \quad \bar{\tau}_{\theta z} \approx \frac{M}{2\pi R^2 h}.\quad (3)$$

В предельном состоянии напряжение вдоль волокон в слоях достигает предела прочности σ_0 , что соответствует из (2), (3) выполнению трех условий:

$$\begin{aligned}1. \quad & A = h_1 + h_2 \sin^2 \alpha_2, \\ 2. \quad & B = h_2 \cos^2 \alpha_2 \Leftrightarrow 1. + 2. \Rightarrow A + B = h_1 + h_2 = h, \\ 3. \quad & C = h_2 \sin \alpha_2 \cos \alpha_2 \Leftrightarrow \frac{3.}{2.} \Rightarrow \frac{C}{B} = \frac{M^*}{P^* R} = \operatorname{tg} \alpha_2 = t, \\ \text{из } 2. \Rightarrow & h_2 = B(1 + t^2) = \frac{B^2 + C^2}{B} = \frac{[P^{*2} + (M^*/R)^2]}{2\pi P^* R \sigma_0},\end{aligned}\quad (5)$$

$$\text{из } 1. \Rightarrow h_1 = A - h_2 \frac{t^2}{1+t^2} = A - \frac{C^2}{B} = \frac{1}{\sigma_0} \left(p^* R - \frac{M^{*2}}{2\pi P^* R^3} \right) \Rightarrow$$

$$h = h_1 + h_2 = A + B.$$

Численный пример:

$$R = 200 \text{ мм}; \quad P^* = 1000 \text{ кН}; \quad p^* = 100 \text{ атм} = 10 \text{ МПа},$$

$$M^* = 100 \text{ кН}\times\text{м}; \quad \sigma_0 = 1000 \text{ МПа},$$

$$A = \frac{p^* R}{\sigma_0} = 2 \text{ мм}; \quad B = \frac{P^*}{2\pi R \sigma_0} \approx 0.8 \text{ мм}; \quad C = \frac{M^*}{2\pi R^2 \sigma_0} \approx 0.4 \text{ мм};\quad (6)$$

$$t = 0.5; \quad \alpha_2 = 0.464 \approx 27^\circ; \quad h_1 = 1.8 \text{ мм}; \quad h_2 = 1 \text{ мм}; \quad h = 2.8 \text{ мм}.$$

$$\begin{aligned}A &= \frac{p^* R}{\sigma_0} = \sum_{i=1}^m (h_i \sin^2 \alpha_i), \\ B &= \frac{P^*}{2\pi R \sigma_0} = \sum_{i=1}^m (h_i \cos^2 \alpha_i), \\ C &= \frac{M^*}{2\pi R^2 \sigma_0} = \sum_{i=1}^m (h_i \sin \alpha_i \cos \alpha_i).\end{aligned}\quad (4)$$

Из (4) для заданных соотношений между нагрузками можно определить отношения толщин слоев, намотанных под разными углами. Остановимся на двух слоях – это 4 параметра: 2 угла и две толщины. Зная три приложенных усилия, можно из трех уравнений (4) найти три параметра из четырех, задавшись одним из них.

2. *Нахождение рациональных углов намотки и толщин слоев при комбинированной нагрузке. Примеры расчета*

2.1. Если наиболее опасно окружное напряжение, создаваемое внутренним давлением, то выбираем один угол $\alpha_1=90^\circ$, а другой угол α_2 и две толщины h_1, h_2 находим из уравнений (4):

2.2. Если считается, что наиболее опасна осевая сила, можно выбрать один угол, равным нулю: $\alpha_1=0$, а другой угол α_2 и

две толщины h_1, h_2 найдутся из уравнений (4), как и в (5), с использованием исходных данных (6):

$$\begin{aligned}
 1. & A = h_2 \sin^2 \alpha_2; \\
 2. & B = h_1 + h_2 \cos^2 \alpha_2 \Leftrightarrow 1. + 2. \Rightarrow A + B = h_1 + h_2 = h; \\
 3. & C = h_2 \sin \alpha_2 \cos \alpha_2 \Leftrightarrow \frac{1.}{3.} \Rightarrow \frac{A}{C} = \operatorname{tg} \alpha_2 = t = 5 \Rightarrow \alpha_2 = 1.37 \approx 79^\circ. \\
 \text{из } 1. & \Rightarrow h_2 = A(1 + t^2) / t^2 = 2.08 \text{ мм}; \\
 \text{из } 2. & \Rightarrow h_1 = B - h_2 \frac{1}{1 + t^2} = 0.72 \text{ мм} \\
 h & = h_1 + h_2 = A + B = 2.8 \text{ мм}.
 \end{aligned}$$

2.3. Возьмем три семейства волокон: для сопротивления окружным напряжениям – под углом $\alpha_1 = 90^\circ$, осевым напряжениям $\alpha_2 = 0$, касательным – $\alpha_3 = 45^\circ$. Три уравнения (4) равновесия по нитяной

модели позволяют предельно просто определить три необходимые толщины h_1, h_2, h_3 (табл. 1 – результаты оценок толщин слоев и углов намотки по нитяной модели для данных (6)):

$$\begin{aligned}
 1. & h_1 + \frac{1}{2} h_3 = A; \quad 2. h_2 + \frac{1}{2} h_3 = B; \quad 3. \frac{1}{2} h_3 = C \Rightarrow \\
 h_3 & = 2C; \quad h_2 = B - C; \quad h_1 = A - C \Rightarrow h_1 + h_2 + h_3 = A + B (!)
 \end{aligned} \tag{7}$$

Важно отметить, что наличие кручение требует для создания рационального проекта приложения нормальных напряжений. В частности, можно создать сложное

напряженное состояние из трех компонент напряжений $A=B=C$, при котором для реализации нитяной модели будет достаточно одного угла симметричной намотки $\pm 45^\circ$.

Т а б л и ц а 1

$\pm\alpha_1^\circ$	$\pm\alpha_2^\circ$	$\pm\alpha_3^\circ$	$h_1, \text{ мм}$	$h_2, \text{ мм}$	$h_3, \text{ мм}$
90	27	-	1,8	1,0	-
0	79	-	0,72	2,08	-
90	0	45	1,6	0,4	0,8
90	0	60	1,31	0,57	0,92
90	0	30	1,76	0,12	0,92

2.4. Подобный 2.3 расчет легко проделать и для произвольного дополнительного

угла: $\alpha_3 = \alpha$ ($\alpha_1 = 90^\circ; \alpha_2 = 0$).

$$\begin{aligned}
 1. & h_1 + h_3 \sin^2 \alpha = A; \quad 2. h_2 + h_3 \cos^2 \alpha = B; \quad 3. h_3 \sin \alpha \cos \alpha = C \Rightarrow \\
 h_3 & = \frac{C}{\sin \alpha \cos \alpha}; \quad h_2 = B - C \operatorname{ctg} \alpha; \quad h_1 = A - C \operatorname{tg} \alpha; \\
 h_1 + h_2 + h_3 & = A + B - C(\operatorname{tg} + \operatorname{ctg} - \frac{1}{\sin \alpha \cos \alpha}) = A + B !!
 \end{aligned} \tag{8}$$

2.5. Для любых трех углов $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ укладки волокон, удобных для расчетов или выбранных из технологических соображений, нитяная модель сводится к реше-

нию системы из трех линейных уравнений (4) с тремя неизвестными толщинами слоев h_1, h_2, h_3 :

$$\begin{aligned} 1. a_1 h_1 + a_2 h_2 + a_3 h_3 &= A \leftrightarrow a_i = \sin^2 \alpha_i; \\ 2. b_1 h_1 + b_2 h_2 + b_3 h_3 &= B \leftrightarrow b_i = \cos^2 \alpha_i = 1 - a_i; \\ 3. c_1 h_1 + c_2 h_2 + c_3 h_3 &= C \leftrightarrow c_i = \sin \alpha_i \cos \alpha_i = \sqrt{a_i b_i}; \\ 1. + 2. &\Rightarrow h_1 + h_2 + h_3 = A + B \quad (!) \end{aligned}$$

Общее решение

$$\begin{aligned} \Delta &= a_1 (b_2 c_3 - b_3 c_2) - a_2 (b_1 c_3 - b_3 c_1) + a_3 (b_1 c_2 - b_2 c_1); \\ h_1 \Delta &= A (b_2 c_3 - b_3 c_2) - a_2 (B c_3 - b_3 C) + a_3 (B c_2 - b_2 C); \\ h_2 \Delta &= a_1 (B c_3 - b_3 C) - A (b_1 c_3 - b_3 c_1) + a_3 (b_1 C - B c_1); \\ h_3 \Delta &= a_1 (b_2 C - B c_2) - a_2 (b_1 C - B c_1) + A (b_1 c_2 - b_2 c_1). \\ \text{С учетом } b_i &= 1 - a_i \\ \Delta &= c_1 (a_2 - a_3) - c_2 (a_1 - a_3) + c_3 (a_1 - a_2); \\ h_1 \Delta &= A [(1 - a_2) c_3 - (1 - a_3) c_2] - a_2 [B c_3 - C] + a_3 [B c_2 - C]; \\ h_2 \Delta &= a_1 [B c_3 - C] - A [(1 - a_1) c_3 - (1 - a_3) c_1] + a_3 [C - B c_1]; \\ h_3 \Delta &= a_1 [C - B c_2] - a_2 [C - B c_1] + A [(1 - a_1) c_2 - (1 - a_2) c_1]; \\ (h_1 + h_2 + h_3) \Delta &= A [c_1 (a_2 - a_3) + c_2 (a_3 - a_1) + c_3 (a_1 - a_2)] + \\ &+ B [c_1 (a_2 - a_3) + c_2 (a_3 - a_1) + c_3 (a_1 - a_2)] = (A + B) \times \Delta; \\ h_1 + h_2 + h_3 &= A + B \quad !! \end{aligned} \quad (9)$$

Таким образом, из решения системы трех уравнений доказано, что для произвольных трех углов сумма толщин трех слоев с различной ориентацией равнонапряженных волокон всегда одинакова и зависит только от приложенных осевых и окружных напряжений и от прочности вдоль волокон.

Обратим внимание, что формулы (9) содержат комбинации параметров с номерами 1, 2, 3, и знак + соответствует четным расстановкам (1-2-3, 3-1-2, 2-3-1), а знак минус – нечетным (1-3-2, 3-2-1, 2-1-3), например, $+a_1 b_2 c_3$; $-a_1 b_3 c_2$; $-a_2 b_1 c_3$.

Из рассмотренных примеров 2.1 – 2.5 видно, что вес любой рационально намотанной трубы зависит только от приложенных нормальных напряжений, а добавление касательных напряжений меняет лишь со-

отношения между толщинами разных слоев.

Но! Подобная рациональная намотка возможна при определенных ограничениях на приложенные нагрузки.

3. Ограничения на углы и толщины при заданных внешних нагрузках

Как видно из примера 2.3, когда один из углов составляет 45° , требования к нагрузкам, для которых возможен рациональный проект, имеют вид:

$$h_2 = B - C \geq 0 \Rightarrow 1) B \geq C; h_1 \geq 0 \Rightarrow 2) A \geq C. \quad (10)$$

При нарушении этих условий оптимальный, равнонапряженный проект невозможен.

Если для сопротивления кручению один угол принят $\alpha_1 = 45^\circ$, то из (4) получаем три уравнения для нахождения второго угла α_2 и двух толщин h_1, h_2 :

$$1. A = \frac{1}{2}h_1 + h_2 \sin^2 \alpha_2; \quad 2. B = \frac{1}{2}h_1 + h_2 \cos^2 \alpha_2; \quad 3. C = \frac{1}{2}h_1 + h_2 \sin \alpha_2 \cos \alpha_2 \Rightarrow$$

$$2. - 1. \Rightarrow h_2 = (B - A) \frac{1+t^2}{1-t^2}; \quad 2. - 3. \Rightarrow h_2 = (B - C) \frac{1+t^2}{1-t} \Rightarrow$$

$$\frac{B - A}{B - C} = 1 + t \Rightarrow t = \frac{C - A}{B - C} < 0??! \text{ для данных (6).}$$

Наличие слоя с углом 45° делает возможным создать оптимальную намотку только при значительных касательных напряжениях, когда требуемая по условию кручения (условие 3) толщина C больше одной из требуемых по нормальным напряжениям толщин B или A (либо $A < C$, либо $B < C$). Если одновременно $A > C$ и $B > C$, то получается противоречие: из $A - C > 0 \Rightarrow \alpha < \pi/4$, и одновременно из $B - C > 0 \Rightarrow \alpha > \pi/4$.

ВЫВОДЫ

1. Применение нитяной модели – простейший способ предварительного подбора рациональной структуры армирования, после которого необходимо применять уточненные критерии прочности для оценки несущей способности.

2. Все рациональные проекты с равнонапряженными волокнами обеспечивают одинаковую, минимально возможную массу композитной трубы для заданных окружного и осевого напряжений. Добавление кручения изменяет лишь отношения толщин слоев с продольной, окружной и наклонной намоткой, но есть ограничения на допустимые значения касательных и нормальных напряжений, чтобы можно было реализовать рациональную систему намотки при выбранной схеме армирования.

3. Сформулированы ограничения на возможные углы армирования, в рамках которых возможно построить рациональный проект композитной трубы при заданных внешних нагрузках.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Образцов И.Ф., Васильев В.В., Бунаков В.А.* Оптимальное армирование оболочек вращения из композиционных материалов. – М.: Машиностроение, 1977.
2. *Huang Ch., Ren M., Li T., Chang X., Lei Y.* Trans-scale modeling framework for failure analysis of cryogenic composite tanks// Composites Part B: Engineering. – Vol. 85, 2016. P. 41...49. <https://doi.org/10.1016/j.compositesb.2015.09.023>.
3. *Grogan D. M., Ó Brádaigh C. M., McGarry J. P., Leen S. B.* Damage and permeability in tape-laid thermoplastic composite cryogenic tanks// Composites Part A: Applied Science and Manufacturing. – Vol. 78, 2015. P. 390...402. <https://doi.org/10.1016/j.compositesa.2015.08.037>.
4. *Соломонов Ю.С., Георгиевский В.П., Недбай А.Я., Андрюшин В.А.* Методы расчета цилиндрических оболочек из композиционных материалов. – М.: Физматлит, 2009.
5. *Бакулин В.Н.* Методы оптимального проектирования и расчета композиционных конструкций. Том 1. Оптимальное проектирование конструкций из композиционных и традиционных материалов. – М.: физматлит, 2008.
6. *Алфутов Н.А., Зиновьев П.А., Попов В.Г.* Расчет многослойных пластин и оболочек из композиционных материалов. Серия "Библиотека расчетчика". – М.: Машиностроение, 1984.
7. *Sklemina O. Yu., Polilov A. N., Tatus N. A.* Analytical and finite element method of calculation of multi-shell gas tanks. 2020 IOP Conf. Ser.: Mater. Sci. Eng. 747 012131. <https://doi.org/10.1088/1757-899X/747/1/012131>.
8. *Малмейстер А.К., Тамуж В.П., Тетерс Г.А.* Сопrotивление жестких полимерных материалов. – Рига: Зинатне, 1967.
9. *Бажанов В.Л., Гольденблат И.И., Копнов В.А., Поспелов А.Д., Синюков А.М.* Сопrotивление стеклопластиков. – М.: Химия, 1968.
10. *Tsai S.W., Wu E.M.* A general theory of strength for anisotropic materials// Journal of Composite Materials. – Vol. 2, № 1, 1971. P. 191...206. <https://doi.org/10.1177/002199837100500106>.

REFERENCES

1. Obratsov I.F., Vasiliev V.V., Bunakov V.A. Optimal reinforcement of shells of revolution made of composite materials. - M.: Mashinostroenie, 1977.
 2. Huang Ch., Ren M., Li T., Chang X., Lei Y. Trans-scale modeling framework for failure analysis of cryogenic composite tanks// Composites Part B: Engineering. – Vol. 85, 2016. P. 41...49. <https://doi.org/10.1016/j.compositesb.2015.09.023>.
 3. Grogan D. M., Ó Brádaigh C. M., McGarry J. P., Leen S. B. Damage and permeability in tape-laid thermoplastic composite cryogenic tanks// Composites Part A: Applied Science and Manufacturing. – Vol. 78, 2015. P. 390...402. <https://doi.org/10.1016/j.composites.2015.08.037>.
 4. Solomonov Yu.S., Georgievsky V.P., Nedbay A.Ya., Andryushin V.A. Methods for calculating cylindrical shells from composite materials. – M.: Fizmatlit, 2009.
 5. Bakulin V.N. Methods of optimal design and calculation of composite structures. Volume 1. Optimal design of structures from composite and traditional materials. – M.: fizmatlit, 2008.
 6. Alfutov N.A., Zinoviev P.A., Popov V.G. Calculation of multilayer plates and shells from composite materials. Series "Calculator Library". - M.: Mashinostroenie, 1984.
 7. Sklemina O.Yu., Polilov A.N., Tatus N.A. Analytical and finite element method of calculation of multi-shell gas tanks. 2020 IOP Conf. Ser.: Mater. sci. Eng. 747 012131. <https://doi.org/10.1088/1757-899X/747/1/012131>.
 8. Malmeister A.K., Tamuzh V.P., Teters G.A. Resistance of rigid polymeric materials. – Riga: Zinatne, 1967.
 9. Bazhanov V.L., Goldenblat I.I., Kopnov V.A., Pospelov A.D., Sinyukov A.M. Fiberglass resistance. – M.: Chemistry, 1968.
 10. Tsai S.W., Wu E.M. A general theory of strength for anisotropic materials// Journal of Composite Materials. – Vol. 2, No. 1, 1971. P. 191...206. <https://doi.org/10.1177/002199837100500106>.
- Рекомендована ученым советом. Поступила 08.10.21.
-