

УДК 539.3

DOI 10.47367/0021-3497_2021_6_219

**МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ
НЕЛИНЕЙНОГО НАПРЯЖЕННО-ДЕФОРМИРОВАННОГО СОСТОЯНИЯ
МНОГОСЛОЙНЫХ КОНСТРУКЦИЙ ИЗ КОМПОЗИТНЫХ МАТЕРИАЛОВ**

**MATHEMATICAL MODELING OF NONLINEAR STRESS-STRAIN STATE
OF MULTILAYER STRUCTURES COMPOSITE MATERIALS**

В.Г. ДМИТРИЕВ, С.В. ХЕЙЛО

V.G. DMITRIEV, S.V. KHEYLO

**(Московский авиационный университет
(Национальный исследовательский университет),
Российский государственный университет имени А.Н. Косыгина (Технологии. Дизайн. Искусство))**

**(Moscow Aviation Institute (National Research University),
Russian State University named after A.N. Kosygin (Technologies. Design. Art))**

E-mail: vgd2105@mail.ru; sheilo@yandex.ru

В статье разрабатываются адекватные математические модели и вычислительные алгоритмы для исследования особенностей процессов деформирования различных несущих конструкций (пластины, оболочки вращения, арки, панели, перекрытия, балки) из композитов на волокнистой основе при больших перемещениях и произвольных углах поворота нормали. Для дискретизации исходной континуальной задачи по пространственным переменным используется метод конечных разностей с заменой дифференциальных операторов конечно-разностными второго порядка аппроксимации. Вычислительный алгоритм решения существенно нелинейной краевой задачи строится на основе адаптации квазидинамической формы метода установления с построения явной двухслойной разностной схемы по времени второго порядка точности. Получены оценки оптимальных значений параметров итерационного процесса.

The paper develops mathematical models and computational algorithms for studying the features of the deformation processes of various load-bearing structures (plates, shells, arches, panels, ceilings, beams) made of fiber-based composites at large changes and angles of the normal rotation. The finite difference method is used to solve the problem of spatial variables. In this case, the differential operators are replaced by finite-difference operators of the approximation second order. The computational algorithm for solving a nonlinear boundary value problem is based on the dynamic form of establishing a two-layer difference scheme method of the second order accuracy. Estimates of the optimal values parameters of the iterative process are obtained.

Ключевые слова: расчет конструкций из композитных материалов, конечные разности, нелинейные задачи, метод установления, аппроксимация.

Keywords: calculation of structures made of composite materials, finite differences, nonlinear problems, establishment method, approximation.

В производстве современных конструкций достаточно широко используются волокнистые композиты. Использование таких материалов в ответственных конструкциях (в машиностроении, авиастроении) требует определения напряженно-деформированного состояния под действием внешних нагрузок [1...5].

Исследование реальных физических процессов методами вычислительного эксперимента является одним из эффективных современных направлений, позволяющих существенно сократить материальные и экономические затраты как при проектировании, так и изготовлении различных изделий. Основным этапом вычислительного эксперимента является разработка математических моделей, адекватно описывающих исследуемые физические процессы и объекты, а также построение экономичных вычислительных алгоритмов решения соответствующих дискретных уравнений, допускающих их практическую реализацию на ЭВМ [6...15]. В большинстве случаев эти конструкции являются оболочками вращения, пластинами, балками, которые процессе эксплуатации претерпевают существенное изменение начальной геометрии при больших перемещениях и углах поворота нормали к координатной поверхности, что вызывает необходимость разработки и развития как адекватных математических моделей, так и универсальных вычисли-

тельных алгоритмов решения существенно нелинейных краевых задач.

При построении математической модели начальная (недеформированная) геометрия изделий может быть как прямолинейной, так и криволинейной.

В общем случае рассматриваются упругие однослойные и многослойные изделия из волокнистых композитов. В качестве координатной поверхности (поверхности приведения) однослойной конструкции принимается срединная поверхность, а для многослойной конструкции из ВК за координатную поверхность может быть принята срединная поверхность одного из слоев, поверхность контакта слоев или линия, проходящая через центры тяжести поперечных сечений. Размер поперечного сечения по нормали к оси полагается малым по сравнению с радиусом кривизны деформированной оси. Для описания процессов деформирования таких конструкций при больших перемещениях точек координатной поверхности и неограниченных углах поворота нормали к ней в качестве неизвестных принимаются изменения декартовых координат x , y поскольку использование традиционных компонент тангенциального u и нормального w перемещения для рассматриваемого варианта геометрически нелинейного деформирования тонкостенных конструкций приводит к значительному усложнению структуры уравнений [15], [16].

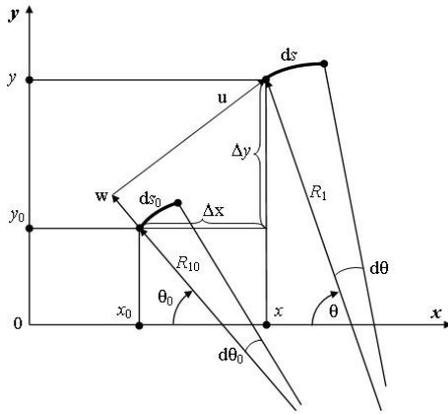


Рис. 1

$$ds_0 = \sqrt{dx_0^2 + dy_0^2}; \quad \sin \theta_0 = \frac{dx_0}{ds_0}; \quad \cos \theta_0 = \frac{dy_0}{ds_0}; \quad ds_0 = R_{10} d\theta_0; \quad k_{10} = \frac{1}{R_{10}} = \frac{d\theta_0}{ds_0}, \quad (1)$$

где R_{10} – радиус кривизны в направлении образующей (рис. 1).

В результате деформации элемент будет иметь длину ds , координаты x, y , угол поворота θ и кривизну k_1 . Рассматривая координаты x, y как функции линейной координаты s вдоль деформированной образующей $x=x(s), y=y(s)$, для деформированного состояния имеем соотношения, аналогичные (1):

$$ds = \sqrt{dx^2 + dy^2}, \quad \sin \theta = \frac{dx}{ds}, \quad \cos \theta = \frac{dy}{ds}, \quad ds = R_1 d\theta, \quad k_1 = \frac{1}{R_1} = \frac{d\theta}{ds}, \quad (2)$$

где θ – угол между осью x и нормалью к деформированной образующей. Ограничения на угол поворота $\Delta\theta = \theta - \theta_0$, аналогичный кинематическому параметру "жесткой" нормали в рамках гипотез Кирхгоффа-Лява, не

До деформации элемент недеформированной образующей длиной ds_0 имеет начальные координаты x_0, y_0 , кривизну k_{10} и начальный угол θ_0 между осью x и нормалью к образующей (рис. 1 – начальный и деформированный элемент конструкции). Полагая координаты x_0, y_0 заданными функциями линейной координаты вдоль образующей $x_0=x_0(s_0), y_0=y_0(s_0)$, для начального (недеформированного) состояния можно записать

накладываются. Компоненты деформации вдоль образующей E_{11} , а также изменение кривизны поверхности приведения K_{11} определяются как:

$$E_{11} = \frac{ds - ds_0}{ds_0} = \frac{ds}{ds_0} - 1, \quad K_{11} = k_1 - k_{10} = \frac{d\theta}{ds} - \frac{d\theta_0}{ds_0}. \quad (3)$$

Введем силовые факторы в поперечном сечении конструкции: продольную T , поперечную силу Q и изгибающий момент M , а также $q_x=q_x(s)$ и $q_y=q_y(s)$ – компоненты интенсивности распределенной нагрузки $q=q(s)$. Не теряя общности, ограничимся случаем физических соотношений для случая упругих панелей при их цилиндрическом изгибе. Для однослойной конструкции толщиной h :

$$T = B_{11} E_{11}, \quad M = D_{11} K_{11}, \quad (4)$$

где $B_{11} = \frac{Eh}{1-\mu^2}$ – жесткость на растяжение;

$$D_{11} = \frac{Eh^3}{12(1-\mu^2)} \text{ – изгибная жесткость.}$$

Для многослойной конструкции из композитов со слоями переменной толщины h_m силовые факторы выражаются через компоненты деформации координатной поверхности по формулам из [17], [18] (рис. 2 – поперечное сечение многослойной конструкции (M –число слоев).)

$$T = B_{11} E_{11} + A_{11} K_{11}, \quad M = A_{11} E_{11} + D_{11} K_{11}. \quad (5)$$

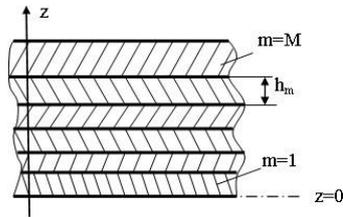


Рис. 2

Жесткостные коэффициенты A_{11} , B_{11} , D_{11} определяются через упругие характеристики слоев и их толщины:

$$B_{11} = \sum_{m=1}^M \int_{z_{m-1}}^{z_m} \frac{E_m}{1-\mu_m^2} dz, \quad A_{11} = \sum_{m=1}^M \int_{z_{m-1}}^{z_m} \frac{E_m z}{1-\mu_m^2} dz, \quad D_{11} = \sum_{m=1}^M \int_{z_{m-1}}^{z_m} \frac{E_m z^2}{1-\mu_m^2} dz, \quad (6)$$

где E_m , μ_m – модули упругости первого рода и коэффициенты Пуассона композита m -го слоя; m – индекс слоя, $1 \leq m \leq M$, M – число слоев.

Физические соотношения балки шириной b и толщиной h могут быть получены из (4)...(6) как частный случай.

Уравнения равновесия элемента панели в проекциях на оси, связанные с деформированной координатной поверхностью, имеют вид:

$$\frac{dT}{ds} + k_1 Q + q_u = 0, \quad \frac{dQ}{ds} - k_1 T + q_w = 0, \quad Q = \frac{dM}{ds}. \quad (7)$$

Соотношения (1)...(7) дополняются граничными условиями на краях $s=s_0$ и $s=s_L$, которые на крае $s=s_0$ формулируются следующим образом:

$$x(s_0) = x_0; \quad y(s_0) = y_0; \quad k_1(s_0) = k_{10} = 1/R_{10}. \quad (9)$$

– жесткое защемление

$$x(s_0) = x_0; \quad y(s_0) = y_0; \quad \theta(s_0) = \theta_0; \quad (8)$$

– шарнирное закрепление

При численном решении системы нелинейных дифференциальных уравнений (1) – (9) дискретизация по пространственным переменным осуществляется методом конечных разностей (МКР) [13 – 15]. В области непрерывного изменения аргумента s вводятся две сетки: основная с целочисленными индексами i и вспомогательная с индексами $i \pm 1/2$, узлы которой располагаются

посредине между узлами основной сетки $i \pm 1$ (рис. 3). Первоначальная геометрия задается сеточными функциями $(x_0)_i$, $(y_0)_i$, где $1 \leq i \leq N$, N – число точек дискретизации. Тогда конечно-разностные аппроксимации дифференциальных соотношений (1) могут быть представлены следующим образом:

$$\begin{aligned} (\Delta s_0)_{i-1/2} &= \Delta s_1 = \sqrt{\Delta x_1^2 + \Delta y_1^2}; \quad (\Delta s_0)_{i+1/2} = \Delta s_2 = \sqrt{\Delta x_2^2 + \Delta y_2^2}; \\ \sin \alpha_1 &= \frac{\Delta y_1}{\Delta s_1}, \quad \theta_1 = (\theta_0)_{i-1/2} = \frac{\pi}{2} - \alpha_1; \quad \sin \alpha_2 = \frac{\Delta y_2}{\Delta s_2}, \quad \theta_2 = (\theta_0)_{i+1/2} = \frac{\pi}{2} - \alpha_2; \\ (\Delta s_0)_i &= \frac{(\Delta s_0)_{i-1/2} + (\Delta s_0)_{i+1/2}}{2}; \quad (k_{10})_i = \frac{(\theta_0)_{i+1/2} - (\theta_0)_{i-1/2}}{(\Delta s_0)_i}, \end{aligned}$$

где $\Delta x_1 = (x_0)_i - (x_0)_{i-1}$, $\Delta y_1 = (y_0)_i - (y_0)_{i-1}$, $\Delta x_2 = (x_0)_{i+1} - (x_0)_i$, $\Delta y_2 = (y_0)_{i+1} - (y_0)_i$.

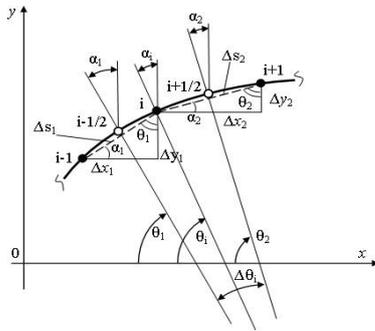


Рис. 3

$$\frac{T_{i+1/2} - T_{i-1/2}}{\Delta s_i} + 0,5(k_1)_i(Q_{i-1/2} + Q_{i+1/2}) + (q_x)_i = 0, \quad (10)$$

$$\frac{Q_{i+1/2} - Q_{i-1/2}}{\Delta s_i} - 0,5(k_1)_i(T_{i-1/2} + T_{i+1/2}) + (q_y)_i = 0, \quad Q_{i-1/2} = \frac{M_i - M_{i-1}}{\Delta s_1}, \quad Q_{i+1/2} = \frac{M_{i+1} - M_i}{\Delta s_2},$$

где $(q_x)_i$, $(q_y)_i$ – сеточные функции компонент поверхностной нагрузки. Поскольку для аппроксимации параметров НДС как в начальном, так и деформированном состоянии используются однотипные конечно-разностные аппроксимации, то при $(q_x)_i = (q_y)_i = 0$ недеформированное состояние является точным решением сеточных уравнений (10), что подтверждает корректность разработанных разностных аппроксимаций.

Для численного решения системы сеточных уравнений (10) используется квазидинамическая форма метода установления с переходом к эволюционной задаче путем замены уравнений равновесия на уравнения движения в вязкой среде [17...19]. Представляя конечно-разностные аналоги уравнений равновесия в операторной форме:

$$[L_{\Delta s}(U_k)]_i + (q_k)_i = 0, \quad (11)$$

$$[\dot{u}_k]_i^{(n+1/2)} = \frac{[2m_k - \varepsilon_k \Delta t]_i}{[2m_k + \varepsilon_k \Delta t]_i} [\dot{u}_k]_i^{(n-1/2)} + \frac{2 \Delta t [L_{\Delta s}(U_k) + q_k]_i^{(n)}}{[2m_k + \varepsilon_k \Delta t]_i} \quad (13)$$

и сеточные функции обобщенных перемещений $[u_k]_i^{(n+1)}$ на временном слое $t^{(n+1)}$:

$$[u_k]_i^{(n+1)} = [u_k]_i^{(n)} + t [\dot{u}_k]_i^{(n+1/2)}. \quad (14)$$

Деформированное состояние описывается сеточными функциями узловых перемещений x_i и y_i с аппроксимацией соотношений (2) конечно-разностными операторами. Конечно-разностные аналоги уравнений равновесия (7), дискретизированные относительно узловой точки основной сетки i , записываются в виде:

где $[L_{\Delta s}(U_k)]_i$ – соответствующие обобщенные конечно-разностные операторы для вектора U_k сеточных функций перемещений: $U_1 = u_i$, $U_2 = w_i$, $(q_1)_i = (q_x)_i$, $(q_2)_i = (q_y)_i$, нестационарные уравнения метода установления можно записать следующим образом:

$$[L_{\Delta s}(U_k)]_i + (q_k)_i = (m_k \ddot{u}_k)_i + (\varepsilon_k \dot{u}_k)_i, \quad (12)$$

где ε_k – параметры удельной вязкости искусственной среды, ρ – плотность; $m_k = \rho h$ ($k=1, 2$).

Аппроксимация уравнений (12) на временной сетке с шагом $\Delta t = \text{const}$ с использованием разностных операторов второго порядка точности (Δt^2) позволяет получить в явном виде выражения для скоростей $[\dot{u}_k]_i^{(n+1/2)}$ на временном слое $t^{(n+1/2)}$:

Таким образом, разностная аппроксимация нестационарных уравнений (12) приводит к итерационному процессу (13), (14) нахождения решения исходной стационарной задачи (11). Параметры итерационного процесса – удельные вязкости среды $\varepsilon_k(i)$ и

шаг по времени Δt – определяются из условия ускорения сходимости и устойчивости разностной схемы [18], [19]. Для случая

$$\varepsilon_k = 2a_{\varepsilon,(k)} \sqrt{\frac{m_k \mu_{1,(k)} \mu_{2,(k)}}{\mu_{1,(k)} + \mu_{2,(k)}}}; \quad \Delta t_k = 2a_{t,(k)} \sqrt{\frac{m_k}{\mu_{1,(k)} + \mu_{2,(k)}}}, \quad (15)$$

где $\mu_{1,(k)}$ и $\mu_{2,(k)}$ – наименьшие и наибольшие собственные числа для соответствующих разностных операторов; $a_{\varepsilon,(k)}$ и $a_{t,(k)}$ – поправочные коэффициенты.

Шаг по времени Δt для всей разностной схемы определяется из условия вида: $\Delta t = \min \Delta t_k$. Для нелинейных задач точное определение границ спектров разностных – наименьшие собственные числа

$$\mu_{1,(1)} = 4 \frac{B_{11}}{\Delta s_0^2} \sin^2 \frac{\pi \Delta s_0}{2 L_0}, \quad \mu_{1,(2)} = 16 \frac{D_{11}}{\Delta s_0^4} \sin^4 \frac{\pi \Delta s_0}{2 L_0} + k_{10}^2 B_{11}, \quad (16)$$

– наибольшие собственные числа

$$\mu_{2,(1)} = 4 \frac{B_{11}}{\Delta s_0^2} \cos^2 \frac{\pi \Delta s_0}{2 L_0}, \quad \mu_{2,(2)} = 16 \frac{D_{11}}{\Delta s_0^4} \cos^4 \frac{\pi \Delta s_0}{2 L_0} + k_{10}^2 B_{11}, \quad (17)$$

где k_{10} – характерное значения кривизны.

Аналогичная математическая модель для исследования существенно нелинейных процессов деформирования листовых материалов из композитных материалов может быть построена, когда в качестве исходных используются соотношения теории мягких оболочек.

Разработанная математическая модель и вычислительный алгоритм решения сеточных уравнений позволяет более точно по сравнению с классическими моделями (уравнения Кирхгова-Лява, Тимошенко) определять параметры НДС многослойных конструкций при произвольных перемещениях и углах поворота. Полученные результаты позволяют провести последующую оптимизацию с возможностью их оптимизации по структурным весовым параметрам, с сокращением материальных затрат.

Результаты проведенного вычисления по сходимости, точности и достоверности предложенных математических моделей показали, что разработанные модели позволяют исследовать такие конструкции в докритической и закритических областях при максимальных перемещениях, достигающих порядка нескольких десятков толщин

стационарного итерационного процесса оценочные формулы с учетом структуры уравнений (14) запишутся в виде [13], [15]:

операторов связано со значительными математическими трудностями, поэтому $\mu_{1,(k)}$ и $\mu_{2,(k)}$ оцениваются в рамках линейных соотношений при соответствующих упрощениях в исходных уравнениях. Оценочные формулы для $\mu_{1,(k)}$ и $\mu_{2,(k)}$ для случая однослойной ортотропной конструкции можно представить следующим образом:

и более, в то время как в обычных подходах в рамках линейных моделей ограничены перемещения порядка 0,3 толщин, а геометрически нелинейные модели, например, в рамках среднего изгиба (квадратичная теория Новожилова В.В.) позволяют расширить эту область применения до 10...15 толщин.

ЛИТЕРАТУРА

1. Васильев В.В. Механика конструкций из композиционных материалов. – М.: Машиностроение, 1988.
2. Nikbakt S., Kamarian S., Shakeri M. A review on optimization of composite structures. part I: Laminated composites // Composite Structures. – Vol. 195, 2018. P. 158...185.
3. Паймушин В.Н., Каюмов Р.А., Шакирзянов Ф.Р., Холмогоров С.А. О специфике работы композитного несущего слоя трехслойной пластины при локальном нагружении // Вестник Пермского национального исследовательского политехнического университета. Механика. – 2020, № 4. С. 152...164.
4. Vasiliev V., Morozov E.V. Advanced mechanics of composite materials // UK: Oxford. – 2007.
5. Олейников А.И. Оценка жесткости и прочности слоистых композитов // Композиты и наноструктуры. – 2017. Т. 9, № 2 (34). С. 77...79.

6. *Орешко Е.И., Ерасов В.С., Лашов О.А., Подживотов Н.Ю., Качан Д.В.* Расчет напряжения в слоистом материале // Труды ВИАМ. – 2018, № 10 (70). С. 93...106.
7. *Zhao W., Xie Z., Wang X., Li X., Hao J.* Buckling behavior of stiffened composite panels with variable thickness skin under compression // *Mechanics of Advanced Materials and Structures*. – 2019.
8. *Zarei A., Khosravifard A.* A meshfree method for static and buckling analysis of shear deformable composite laminates considering continuity of interlaminar transverse shearing stresses // *Composite Structures*. – 2019. P. 206...218.
9. *Vosoughi A.R., Darabi A., Anjabin N., Topal U.* A mixed finite element and improved genetic algorithm method for maximizing buckling load of stiffened laminated plates // *Aerospace and Technology*. – Vol. 70, 2017. P. 378...387.
10. *Tran L.V., Wahab M.A., Kim S.E.* An isogeometric finite element approach for thermal bending and buckling analyses of laminated composite plates // *Composite Structures*. – Vol. 179, 2017. P. 35...39.
11. *Ramaswamy S., Rajadurai J.S., Moshi A.A.M.* Comparative analysis on classical laminated plate theory and higher order lamination plate theory for crossply FRP composite structures // *Journal of Computational and Theoretical Nanoscience*. – Vol. 14, № 11, 2017. P. 5444...5449.
12. *Ragb O., Matbuly M.S.* Buckling analysis of composite plates using moving least squares differential quadrature method // *International Journal of Computational Methods in Engineering Science and Mechanics*. – Vol. 18, № 6, 2017. P. 292...301.
13. *Liew K.M., Pan Z.Z., Zhang I.W.* An overview of layerwise theories for composite laminates and structures: Development, numerical implementation and application // *Composite Structures*. – Vol. 216, 2019. P.240...259.
14. *Бульбович Р.В., Ознобишин А.Б., Рогожникова Е.Н.* Численно-экспериментальное исследование многослойных цилиндрических корпусов с локальными расслоениями // Вестник Пермского национального исследовательского политехнического университета. Аэрокосмическая техника. – 2020, № 63. С. 40...51.
15. *Бакулин В.Н.* Блочная конечно-элементная модель для послойного анализа напряженно-деформированного состояния трехслойных оболочек с нерегулярной структурой // Изв. Российской академии наук. Механика твердого тела. – 2018, № 4. С.66...73.
16. *Григолюк Э.И., Шалашилин В.И.* Проблемы нелинейного деформирования: Метод продолжения решения по параметру в нелинейных задачах механики твердого деформируемого тела. – М.: Наука, 1988.
17. *Dmitriev V.G., Egorova O.V., Starovoitov E.I.* Particularities of mathematical modeling of deformation processes for arched and panel designs of composites with large displacements and rotation angles // *INCAS Bulletin*. – 2020, 12(Special Issue). P. 53...66.
18. *Бахвалов Н.С., Жидков Н.П., Кобельков Г.М.* Численные методы. – М.: Физматлит. Лаборатория Базовых Знаний, 2001.
19. *Dmitriev V.G., Egorova O.V., Rabinsky Lev N.* Solution of nonlinear initial boundary-value problems of the mechanics of multiply connected composite material shells on the basis of conservative difference schemes // *Composites: Mechanics, Computations, Applications: An International Journal*. – Vol. 6, Is. 4, 2015. P.265...277.

REFERENCES

- Vasiliev V., Morozov E.V. Mechanics of composite materials // Moscow, Publishing house of Mashinostroenie. 1988. 269 p.
- Nikbakt S., Kamarian S., Shakeri M. A review on optimization of composite structures. part I: Laminated composites // *Composite Structures*. – 2018. – Vol. 195. - PP. 158-185.
- Paimushin V. N., Kayumov R. A., Shakirzyanov F. R., Kholmogorov S. A. On the specifics of the operation of the composite load-bearing layer of a three-layer plate under local loading. *Bulletin of the Perm National Research Polytechnic University. Mechanics*. 2020. № 4. P. 152-164.
- Vasiliev V., Morozov E.V. Advanced mechanics of composite materials // UK: Oxford. – 2007.
- Oleynikov A. I. Evaluation of stiffness and strength of layered composites *Composites and nanostructures*. 2017. T. 9. № 2 (34). P. 77-79.
- Oreshko E. I., Erasov V. S., Lashov O. A., Podzhivotov N. Yu., Kachan D. V. Calculation of stress in a layered material. *Works of VIAM*. 2018. № 10 (70). P. 93-106.
- Zhao W., Xie Z., Wang X., Li X., Hao J. Buckling behavior of stiffened composite panels with variable thickness skin under compression // *Mechanics of Advanced Materials and Structures*. - 2019.
- Zarei A., Khosravifard A. A meshfree method for static and buckling analysis of shear deformable composite laminates considering continuity of interlaminar transverse shearing stresses // *Composite Structures*. – 2019. - PP. 206-218.
- Vosoughi A.R., Darabi A., Anjabin N., Topal U. A mixed finite element and improved genetic algorithm method for maximizing buckling load of stiffened laminated plates // *Aerospace and Technology*. - 2017. – Vol. 70. - PP. 378-387.
- Tran L.V., Wahab M.A., Kim S.E. An isogeometric finite element approach for thermal bending and buckling analyses of laminated composite plates // *Composite Structures*. - 2017. – Vol. 179. - PP. 35-39.

11. Ramaswamy S., Rajadurai J.S., Moshi A.A.M. Comparative analysis on classical laminated plate theory and higher order lamination plate theory for cross-ply FRP composite structures // *Journal of Computational and Theoretical Nanoscience*. - 2017. – Vol. 14. - № 11. - PP. 5444-5449.
12. Ragb O., Matbully M.S. Buckling analysis of composite plates using moving least squares differential quadrature method // *International Journal of Computational Methods in Engineering Science and Mechanics*. – 2017. – Vol. 18. - № 6. - PP. 292-301.
13. Liew K.M., Pan Z.Z., Zhang I.W. An overview of layerwise theories for composite laminates and structures: Development, numerical implementation and application // *Composite Structures*. – 2019. – Vol. 216. - PP. 240-259.
14. Bulbovich R. V., Oznobishin A. B., Rogozhnikova E. N. Numerical and experimental study of multi-layer cylindrical shells with local bundles. *Bulletin of the Perm National Research Polytechnic University. Aerospace engineering*. 2020. № 63. P. 40-51
15. Bakulin V. N. Block finite element model for layer-by-layer analysis of the stress-strain state of three-layer shells with an irregular structure. *Proceedings of the Russian Academy of Sciences. Solid State Mechanics*. 2018. № 4. P. 66-73.
15. Grigolyuk E. I., Shalashilin V. I. Problems of nonlinear deformation: A method for continuing the solution by parameter in nonlinear problems of mechanics of a solid deformable body. - M.: Nauka, 1988. - 232 p.
16. Dmitriev, V.G., Egorova, O.V., Starovoitov, E.I. Particularities of mathematical modeling of deformation processes for arched and panel designs of composites with large displacements and rotation angles. *IN-CAS Bulletin*, 2020, 12 (Special Issue), p. 53-66.
17. Dmitriev V. Applied Mathematic Technologies in Nonlinear Mechanics of Thin-Walled Constructions. Chapter 4. Book *Mathematics Applied to Engineering and Management Sciences*. Edited by Mangey Ram and S. B. Singh. CRC Press Taylor & Francis Group. BocaRaton, 2019, pp. 71-116.
18. Bakhvalov N. S., Zhidkov N. P., Kobelkov G. M. Numerical methods. - M.: Fizmatlit. Laboratory of Basic Knowledge, 2001. - 632 p.
19. Dmitriev V.G., Egorova O.V., Rabinsky Lev N. Solution of nonlinear initial boundary-value problems of the mechanics of multiply connected composite material shells on the basis of conservative difference schemes. - *Composites: Mechanics, Computations, Applications: An International Journal*, 2015. Volume 6, Issue 4, pp. 265-277.
- Рекомендована кафедрой теоретической и прикладной механики РГУ имени А.Н. Косыгина. Поступила 15.11.21.