УДК 539.434:677.494
DOI 10.47367/0021-3497_2021_6_226

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ И ПРОГНОЗИРОВАНИЕ РЕЛАКСАЦИОННЫХ И ДЕФОРМАЦИОННЫХ ПРОЦЕССОВ КОМПОЗИТОВ, АРМИРОВАННЫХ ТЕКСТИЛЬНЫМИ МАТЕРИАЛАМИ*

MATHEMATICAL MODELING AND PREDICTION OF RELAXATION AND DEFORMATION PROCESSES OF COMPOSITES REINFORCED WITH TEXTILE MATERIALS

Н.В. ПЕРЕБОРОВА, А.А. МАКАРОВА, Н.С. КЛИМОВА, А.М. ЛИТВИНОВ, В.И. ВАГНЕР

N.V. PEREBOROVA, A.A. MAKAROVA, N.S. KLIMOVA, A.M. LITVINOV, V.I. VAGNER

(Санкт-Петербургский государственный университет промышленных технологий и дизайна)

(Saint Petersburg State University of Industrial Technologies and Design)

E-mail: nina1332@yandex.ru; anastasiaquish@yahoo.com; nsk-klimova@yandex.ru; litalmih@yandex.ru; wag-nerv@mail.ru

В статье описываются методы математического моделирования и системного анализа релаксационных и деформационных процессов композитов и армирующих их текстильных материалов. Математическое модели-

* Работа финансировалась в рамках выполнения государственного задания Министерства науки и высшего образования РФ, Проект № FSEZ-2020-0005.

рование и последующий системный анализ релаксационных и деформационных процессов композитов и текстильных материалов позволяет провести качественную оценку их функциональных и эксплуатационных возможностей.

The article describes methods of mathematical modeling and system analysis of relaxation and deformation processes of composites and textile materials reinforcing them. Mathematical modeling and subsequent system analysis of the relaxation and deformation processes of composites and textile materials allows a qualitative assessment of their functional and operational capabilities.

Ключевые слова: композиты, текстильные материалы, релаксационные процессы, деформационные процессы, математическое моделирование, прогнозирование.

Keywords: composites, textile materials, relaxation processes, deformation processes, mathematical modeling, forecasting.

Исходными данными для построения математической модели релаксационного процесса композитов и армирующих их текстильных материалов является эксперимент. По данным проведенного эксперимента в логарифмическо-временной шкале приведенного времени строится "семейство" кривых релаксации, то есть "семейство" кривых зависимости напряжения σ от логарифма приведенного времени для разных уровней постоянной деформации ε.

Полученное таким образом "семейство" кривых релаксации на основе формулы

$$E(\varepsilon,t)=\sigma(t)/\varepsilon \qquad (1)$$

перестраивается в "семейство" кривых модуля релаксации $E_{\varepsilon t}=E(\varepsilon,t)$.

Математическое моделирование релаксационного процесса исследуемых материалов проводится на основе принципа деформационно-временной аналогии [1...3], когда "семейство" кривых модуля релаксации (σ – напряжение, ε – деформация, t – время), построенное по логарифмической шкале приведенного времени $\ln(t/t_1)$ (t_1 – некоторое фиксированное значение "базового" времени), путем параллельных сдвигов вдоль логарифмическо-временной шкалы накладывается на некоторую "обобщенную" кривую релаксации, задаваемую нормированной функцией $\varphi(\ln(t/t_1))$.

При этом в качестве нормированной функции φ, как правило, выбирают одну из следующих функций [4...6]:

- интеграл вероятностей (ИВ)

$$\varphi=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\frac{1}{a_n}\ln\frac{t}{\tau}} e^{-\frac{z^2}{2}}\,dz\,, \qquad (2)$$

которая является интегральной функцией нормального распределения,

- нормированный арктангенс логарифма (НАЛ)

$$\varphi=\frac{1}{2}+\frac{1}{\pi}\operatorname{arctg}\left(\frac{1}{b_n}\ln\frac{t}{\tau}\right), \qquad (3)$$

которая является интегральной функцией распределения вероятностного закона Коши,

- гиперболический тангенс (ГТ)

$$\varphi=\frac{1}{2}\left(1+\operatorname{th}\left(\frac{A_n}{2}\ln\frac{t}{\tau}\right)\right), \qquad (4)$$

- функцию Кольрауша (ФК)

$$\varphi=1-e^{-(t/\tau)^{k_n}} \qquad (5)$$

и некоторые другие (здесь a_n, b_n, A_n, k_n, – структурные коэффициенты, характеризующие интенсивность вязкоупругого процесса).

Аппроксимация модуля релаксации $E_{\varepsilon t}=E(\varepsilon,t)$ с помощью какой-нибудь нормированной релаксационной функции $\varphi_{\varepsilon t}=\varphi(\varepsilon,t)$ типа (2)...(5) будет иметь следующий вид:

$$E_{\varepsilon t}=E_o-(E_o-E_\infty)\varphi_{\varepsilon t}, \quad (6)$$

где E_0 – модуль упругости; E_∞ – модуль вязкоупругости.

При этом если в качестве релаксационной функции $\varphi_{\varepsilon t}$ выбрать интеграл вероятностей ИВ, то формула (6) примет вид:

$$E_{\varepsilon t}=E_o-(E_o-E_\infty)\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{\frac{1}{a_{n\varepsilon}}\ln\frac{t}{\tau_\varepsilon}} e^{-\frac{z^2}{2}}dz. \quad (7)$$

В случае выбора других релаксационных функций получаем:

$$E_{\varepsilon t}=E_o-(E_o-E_\infty)\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{\pi}\operatorname{arctg}\left(\frac{1}{b_{n\varepsilon}}\ln\frac{t}{\tau_\varepsilon}\right)\right) \quad (8)$$

– для функции НАЛ,

$$E_{\varepsilon t}=E_o-(E_o-E_\infty)\frac{1}{2}\left(1+\operatorname{th}\left(\frac{A_{n\varepsilon}}{2}\ln\frac{t}{\tau_\varepsilon}\right)\right) \quad (9)$$

– для функции ГТ и

$$E_{\varepsilon t}=E_o-(E_o-E_\infty)\left(1-e^{-\left(t/\tau_\varepsilon\right)^{k_{n\varepsilon}}}\right) \quad (10)$$

– для функции ФК.

В формулах (7)...(10):

- τ_ε – время релаксации, зависящее от деформации ε;

- константы $a_{n\varepsilon}$, $b_{n\varepsilon}$, $A_{n\varepsilon}$, $k_{n\varepsilon}$ характеризуют интенсивность процесса релаксации и зависят от свойств исследуемой полимерной нити; индекс n указывает на то, что выбрана нормальная логарифмическая шкала приведенного времени.

Несомненным достоинством моделей (6)...(10) является то, что они содержат наименьшее возможное число параметров, имеющих определенный физический смысл:

- $E_0=\lim\limits_{t\to 0}\left(\sigma(\varepsilon,t)/\varepsilon\right)$ – модуль упругости, характеризующий квазимгновенное значение модуля релаксации, то есть его значение в начале процесса релаксации;

- $E_\infty=\lim\limits_{t\to \infty}\left(\sigma(\varepsilon,t)/\varepsilon\right)$ – модуль вязкоупругости, характеризующий квазиравновесное значение модуля релаксации, то есть его значение в конце процесса релаксации;

- структурные параметры $a_{n\varepsilon}$, $b_{n\varepsilon}$, $A_{n\varepsilon}$, $k_{n\varepsilon}$ характеризуют скорость (интенсивность) процесса релаксации;

- время релаксации $\tau_\varepsilon=\tau(\varepsilon)$ характеризует время прохождения половины процесса релаксации при заданном значении деформации ε.

Учитывая, что модуль релаксации определяется формулой (6), получаем простейшие выражения для прогнозирования напряжения:

$$\sigma(\varepsilon,t)=E_0\varepsilon-(E_0-E_\infty)\varepsilon\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{\frac{1}{a_{n\varepsilon}}\ln\frac{t}{\tau_\varepsilon}} e^{-\frac{z^2}{2}}dz \quad (11)$$

– для функции ИВ,

$$\sigma(\varepsilon,t)=E_0\cdot\varepsilon-(E_0-E_\infty)\varepsilon\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{\pi}\operatorname{arctg}\left(\frac{1}{b_{n\varepsilon}}\ln\frac{t}{\tau_\varepsilon}\right)\right) \quad (12)$$

– для функции НАЛ,

$$\sigma(\varepsilon,t)=E_0\varepsilon-\frac{E_0-E_\infty}{2}\varepsilon\left(1+th\left(\frac{A_{n\varepsilon}}{2}\left(\frac{t}{\tau\varepsilon}\right)\right)\right) \quad (13)$$

– для функции ГТ и

$$\sigma(\varepsilon,t)=E_0\varepsilon-(E_0-E_\infty)\varepsilon\left(1-e^{-\left(t/\tau_\varepsilon\right)^{k_{n\varepsilon}}}\right) \quad (14)$$

– для функции ФК.

Формулами (11)...(14) можно пользоваться для прогнозирования релаксационных процессов композитов и армирующих их текстильных материалов [7...9].

Аналогично построению математической модели релаксационного процесса исходными данными для построения математической модели деформационного процесса композитов и армирующих их текстильных материалов является эксперимент. По данным проведенного эксперимента в логарифмическо-временной шкале приведенного времени строится "семейство" кривых ползучести, то есть "семейство" кривых зависимости деформации ε от логарифма приведенного времени для разных уровней постоянного напряжения σ.

Далее указанное "семейство" кривых ползучести на основе формулы:

$$D(\sigma,t)=\varepsilon(t)/\sigma \qquad (15)$$

перестраивается в "семейство" кривых податливости $D_{\sigma t}=D(\sigma,t)$.

Далее на основе принципа сило-временной аналогии производится моделирование вязкоупругой ползучести (изменение во времени деформации ε, зависящей от напряжения σ) – "семейство" кривых податливости $D(\sigma,t)=\varepsilon(t)/\sigma$ (σ – напряжение, ε – деформация, t – время), построенное по логарифмической шкале приведенного времени $\ln(t/t_1)$ (t_1 – некоторое фиксированное значение "базового" времени), путем параллельных сдвигов вдоль логарифмическо-временной шкалы накладывается на некоторую "обобщенную" кривую податливости, задаваемую нормированной функцией $\varphi(\ln(t/t_1))$, в качестве которой обычно выбирают одну из функций (2)...(5).

При этом аппроксимация податливости $D_{\sigma t}=D(\sigma,t)$ с помощью какой-нибудь нормированной функции запаздывания $\varphi_{\sigma t}=\varphi(\sigma,t)$ типа (2)...(5) будет иметь следующий вид:

$$D_{\sigma t}=D_0+(D_\infty-D_0)\varphi_{\sigma t}, \qquad (16)$$

где D_0 – начальная упругая податливость; D_∞ – предельно-равновесная податливость.

При этом если в качестве функции запаздывания $\varphi_{\sigma t}$ выбрать интеграл вероятностей ИВ, то формула (16) примет вид [10]:

$$D_{\sigma t}=D_0+(D_\infty-D_0)\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\frac{1}{a_{n\sigma}}\ln\frac{t}{\tau_\sigma}} e^{-\frac{z^2}{2}}dz. \qquad (17)$$

В случае выбора других функций запаздывания, получаем:

$$D_{\sigma t}=D_0+(D_\infty-D_0)\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{\pi}\operatorname{arctg}\left(\frac{1}{b_{n\sigma}}\ln\frac{t}{\tau_\sigma}\right)\right) \qquad (18)$$

– для функции НАЛ,

$$D_{\sigma t}=D_0+(D_\infty-D_0)\frac{1}{2}\left(1+\operatorname{th}\left(\frac{A_{n\sigma}}{2}\ln\frac{t}{\tau_\sigma}\right)\right) \qquad (19)$$

– для функции ГТ и

$$D_{\sigma t}=D_0+(D_\infty-D_0)\cdot\left(1-e^{-\left(t/\tau_\sigma\right)^{k_{n\sigma}}}\right) \qquad (20)$$

– для функции ФК.

В формулах (17)...(20): τ_σ – время запаздывания, зависящее от напряжения σ; константы $a_{n\sigma}$, $b_{n\sigma}$, $A_{n\sigma}$, $k_{n\sigma}$ характеризуют интенсивность процесса ползучести и зависят от свойств исследуемой полимерной нити; индекс n указывает на то, что выбрана нормальная логарифмическая шкала приведенного времени.

Несомненным достоинством моделей (16) - (20) является то, что они содержат наименьшее возможное число параметров, имеющих определенный физический смысл:

- $D_0=\lim\limits_{t\to 0}(\varepsilon(\sigma,t)/\sigma)$ – начальная упругая податливость, характеризующая квазимгновенное значение податливости, то есть ее значение в начале деформационного процесса;
- $D_\infty=\lim\limits_{t\to\infty}(\varepsilon(\sigma,t)/\sigma)$ – предельно-равновесная податливость, характеризующая квазиравновесное значение податливости, то есть ее значение в конце деформационного процесса;

- структурные параметры $a_{n\varepsilon}$, $b_{n\varepsilon}$, $A_{n\varepsilon}$, $k_{n\varepsilon}$ характеризуют скорость (интенсивность) деформационного процесса;

- время запаздывания (ползучести) $\tau_\sigma = \tau(\sigma)$ характеризует время прохождения половины деформационного процесса при заданном значении напряжения σ.

Учитывая, что податливость определяется формулой (16), получаем простейшие выражения для прогнозирования деформации [11...13]:

$$\varepsilon(\sigma,t) = D_0\sigma + (D_\infty - D_0)\sigma \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\frac{1}{a_{n\sigma}}\ln\frac{t}{\tau_\sigma}} e^{-\frac{z^2}{2}} dz \quad (21)$$

– для функции ИВ,

$$\varepsilon(\sigma,t) = D_0\sigma + (D_\infty - D_0)\sigma \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \operatorname{arctg}\left(\frac{1}{b_{n\sigma}} \ln\frac{t}{\tau_\sigma} \right) \right) \quad (22)$$

– для функции НАЛ,

$$\varepsilon(\sigma,t) = D_0\sigma + (D_\infty - D_0)\sigma \frac{1}{2}\left(1 + th\left(\frac{A_{n\sigma}}{2} \cdot ln\left(\frac{t}{\tau_\sigma} \right) \right) \right) \quad (23)$$

– для функции ГТ и

$$\varepsilon(\sigma,t) = D_0\sigma + (D_\infty - D_0)\sigma \left(1 - e^{-\left(t/\tau_\sigma\right)^{k_{n\sigma}}} \right) \quad (24)$$

– для функции ФК.

Формулами (21)...(24) можно пользоваться для прогнозирования деформационных процессов композитов и армирующих их текстильных материалов.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Makarov A.G., Slutsker G.Y., Gofman I.V., Vasil'eva V.V.* Initial stage of stress relaxation in oriented polymers. Physics of the Solid State. – Vol. 58, № 4, 2016. P. 840...846.

2. *Makarov A.G., Slutsker G.Y., Drobotun N.V.* Creep and fracture kinetics of polymers. Technical Physics. – Vol. 60, № 2, 2015. P. 240...245.

3. *Gorshkov A.S., Makarov A.G., Romanova A.A., Rymkevich P.P.* Modelling of directed polymers deformation processes based on the description of the kinetics of supramolecular structures separated by energy barriers. Magazine of Civil Engineering. – Vol. 44, № 9, 2013. P. 76...83+103...104.

4. *Rymkevich P.P., Romanova A.A., Golovina V.V., Makarov A.G.* The energy barriers model for the physical description of the viscoelasticity of synthetic polymers: Application to the uniaxial orientational drawing of polyamide films // Journal of Macromolecular Science, Part B: Physics. – Vol. 52, № 12, 2013. P.1829...1847.

5. *Demidov A.V., Makarov A.G., Stalevich A.M.* A version of modeling of nonlinear-hereditary viscoelasticity of polymer materials//Mechanics of Solids. – №44 (1), 2009. P. 122...130.

6. *Demidov A.V., Makarov A.G., Stalevich A.M.* Predicting the nonlinear hereditary viscoelasticity of polymers//Journal of Applied Mechanics and Technical Physics. – №48 (6), 2007. P. 897...904.

7. *Makarov A.G.* Determining the analytical correlation between the standardized nuclei of relaxation and creep in textile materials//Izvestiya Vysshikh Uchebnykh Zavedenii, Seriya Teknologiya Tekstil'noi Promyshlennosti. – 2002, №2. P. 13...17.

8. *Stalevich A.M., Makarov A.G.* Forecasting the deformation recovery process and the reverse relaxation in polymer materials//Izvestiya Vysshikh Uchebnykh Zavedenii, Seriya Teknologiya Tekstil'noi Promyshlennosti. – 2002, №3. P. 10...13.

9. *Stalevich A.M., Makarov A.G.* Determining the inherent viscoelastic relaxation spectrum for synthetic filaments//Izvestiya Vysshikh Uchebnykh Zavedenii, Seriya Teknologiya Tekstil'noi Promyshlennosti. – 2000, №3. P. 8...12.

10. *Pereborova N.V., Demidov A.V., Makarov A.G., Klimova N.S.* Modeling of Deformation-Relaxation Processes of Aramid Textile Materials – the Foundation for Analyzing Their Operational Properties// Fibre Chemistry. – Vol. 50, №2, 2018. P. 104...107.

11. *Pereborova N.V., Makarov A.G., Egorova M.A., Kozlov A.A., Konovalov A.S.* Methods of simulation and comparative analysis of shadow and deformation-reducing properties of aramide textile materials//Izvestiya Vysshikh Uchebnykh Zavedenii, Seriya Teknologiya Tekstil'noi Promyshlennosti. – 2018, №3. P. 253...257.

12. *Makarov A.G., Pereborova N.V., Egorova M.A., Wagner V.I.* Modeling and forecasting viscoelastic properties of textile materials with a complex structure//Izvestiya Vysshikh Uchebnykh Zavedenii, Seriya Teknologiya Tekstil'noi Promyshlennosti. – 2014, №6. P. 120...124.

13. *Demidov A.V., Makarov A.G., Stalevich A.M.* The criteria of optimal selection of mathematical model of textile materials viscoelasticity//Izvestiya Vysshikh Uchebnykh Zavedenii, Seriya Teknologiya Tekstil'noi Promyshlennosti. – 2006, №5. P. 21...25.

REFERENCES

1. Makarov A.G., Slutsker G.Y., Gofman I.V., Vasil'eva V.V. Initial stage of stress relaxation in oriented polymers. Physics of the Solid State. – Vol. 58, № 4, 2016. P. 840...846.

2. Makarov A.G., Slutsker G.Y., Drobotun N.V. Creep and fracture kinetics of polymers. Technical Physics. – Vol. 60, № 2, 2015. P. 240...245.

3. Gorshkov A.S., Makarov A.G., Romanova A.A., Rymkevich P.P. Modelling of directed polymers deformation processes based on the description of the kinetics

of supramolecular structures separated by energy barriers. Magazine of Civil Engineering. – Vol. 44, № 9, 2013. P. 76...83+103...104.

4. Rymkevich P.P., Romanova A.A., Golovina V.V., Makarov A.G. The energy barriers model for the physical description of the viscoelasticity of synthetic polymers: Application to the uniaxial orientational drawing of polyamide films // Journal of Macromolecular Science, Part B: Physics. – Vol. 52, № 12, 2013. P.1829...1847.

5. Demidov A.V., Makarov A.G., Stalevich A.M. A version of modeling of nonlinear-hereditary viscoelasticity of polymer materials//Mechanics of Solids. – №44 (1), 2009. P. 122...130.

6. Demidov A.V., Makarov A.G., Stalevich A.M. Predicting the nonlinear hereditary viscoelasticity of polymers//Journal of Applied Mechanics and Technical Physics. – №48 (6), 2007. P. 897...904.

7. Makarov A.G. Determining the analytical correlation between the standardized nuclei of relaxation and creep in textile materials//Izvestiya Vysshikh Uchebnykh Zavedenii, Seriya Teknologiya Tekstil'noi Promyshlennosti. – 2002, №2. P. 13...17.

8. Stalevich A.M., Makarov A.G. Forecasting the deformation recovery process and the reverse relaxation in polymer materials//Izvestiya Vysshikh Uchebnykh Zavedenii, Seriya Teknologiya Tekstil'noi Promyshlennosti. – 2002, №3. P. 10...13.

9. Stalevich A.M., Makarov A.G. Determining the inherent viscoelastic relaxation spectrum for synthetic filaments//Izvestiya Vysshikh Uchebnykh Zavedenii, Seriya Teknologiya Tekstil'noi Promyshlennosti. – 2000, №3. P. 8...12.

10. Pereborova N.V., Demidov A.V., Makarov A.G., Klimova N.S. Modeling of Deformation-Relaxation Processes of Aramid Textile Materials – the Foundation for Analyzing Their Operational Properties// Fibre Chemistry. – Vol. 50, №2, 2018. P. 104...107.

11. Pereborova N.V., Makarov A.G., Egorova M.A., Kozlov A.A., Konovalov A.S. Methods of simulation and comparative analysis of shadow and deformation-reducing properties of aramide textile materials//Izvestiya Vysshikh Uchebnykh Zavedenii, Seriya Teknologiya Tekstil'noi Promyshlennosti. – 2018, №3. P. 253...257.

12. Makarov A.G., Pereborova N.V., Egorova M.A., Wagner V.I. Modeling and forecasting viscoelastic properties of textile materials with a complex structure//Izvestiya Vysshikh Uchebnykh Zavedenii, Seriya Teknologiya Tekstil'noi Promyshlennosti. – 2014, №6. P. 120...124.

13. Demidov A.V., Makarov A.G., Stalevich A.M. The criteria of optimal selection of mathematical model of textile materials viscoelasticity//Izvestiya Vysshikh Uchebnykh Zavedenii, Seriya Teknologiya Tekstil'noi Promyshlennosti. – 2006, №5. P. 21...25.

Рекомендована кафедрой интеллектуальных систем и защиты информации. Поступила 27.10.21.