

УДК 677.024.1

DOI 10.47367/0021-3497\_2021\_6\_237

**ТЕОРЕТИЧЕСКИЙ РАСЧЕТ ОБЪЕМНОГО ЗАПОЛНЕНИЯ  
3D-ТКАНЕЙ УГЛЕРОДНЫМИ НИТЯМИ  
С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ ВОКСЕЛЬНОГО ПОДХОДА  
К ИХ ПРОЕКТИРОВАНИЮ**

**THEORETICAL CALCULATION OF VOLUMETRIC FILLING  
3D FABRICS WITH CARBON FILAMENTS  
USING A PROMISSORY NOTE APPROACH TO THEIR DESIGN**

*Н.В. КИСЕЛЁВ, М.В. КИСЕЛЕВ, А.Б. БАЛАШОВ, С.Е. ГОЛУБЕВ*

*N.V. KISELEV, M.V. KISELEV, A.B. BALASHOV, S.E. GOLUBEV*

**(ООО НПО "Программируемые Композиты", Россия)**

**(ООО NPO "Programmable Composites" LLC, Russia)**

E-mail: kstu-tplv@yandex.ru; kisselev50@mail.ru; balashovandrej@yandex.ru; golubev007@mail.ru

*Статья посвящена исследованию влияния объемного заполнения пре-формы композиционного материала углеродной нитью с точки зрения его механической прочности. Наиболее актуальна данная задача для технологии 3D-ткачества, где заполнение углеродной нитью происходит по всем трем координатным осям. Для построения аналитической модели объемного заполнения 3D-тканей использован воксельный подход. Разработана математическая модель заполнения объема вокселя углеродными нитями*

*для 3D-ткачества. В качестве упрощающих допущений при построении модели выбран один тип поперечного сечения углеродной нити в форме окружности. Выполнено исследование разработанной модели с точки зрения выбора различных диаметров армирующих нитей для получения наибольшего объемного заполнения вокселя углеродными нитями. Сделаны выводы по работе.*

*The article is devoted to the study of the volumetric filling influence of the composite material preform with a carbon filament from the standpoint of its mechanical strength. This task is the most relevant one for 3D weaving technology, where filling with carbon thread occurs along all three coordinate axes. A voxel approach was used to construct an analytical model of 3D tissues volumetric filling. A mathematical model of filling the voxel volume with carbon filaments for 3D weaving has been developed. As simplifying assumptions in the construction of the model, one type of a carbon filament cross-section in the form of a circle was chosen. The study of the developed model is carried out from the standpoint of choosing different diameters of reinforcing filaments to obtain the largest volume filling of the voxel with carbon filaments. Conclusions are made.*

**Ключевые слова:** композиционные материалы, 3D-ткачество, углеродная нить, математическое моделирование, прочность.

**Keywords:** composite materials, 3D weaving, carbon filament, mathematical modeling, strength.

К композиционным материалам, особенно производимым на основе высокомодульных и высокопрочных химических волокон и нитей, и изделиям, изготавливаемым из них, предъявляются высокие требования к эксплуатационным характеристикам. При этом наиболее важной эксплуатационной характеристикой композиционных материалов является их прочность при различных напряженно-деформированных состояниях, характерных для условий работы изделия. Для повышения прочности композиционных материалов используют различные армирующие нити, их структуры, технологии изготовления и др. В данной статье выполнено исследование зависимости коэффициента объемного заполнения композита от линейных плотностей углеродных армирующих нитей с целью обеспечения максимального значения коэффициента объемного заполнения.

Влияние коэффициента объемного заполнения композита армирующими нитями на его прочность известно [1] и является прямопропорциональным. Такой же вывод

можно сделать, и анализируя аналитическую зависимость напряжения от объемного заполнения композита армирующими нитями и связующим [2...7], используемую при гомогенизации свойств композита:

$$\sigma = \sigma_f V_f + \sigma_m V_m, \quad (1)$$

где  $\sigma$  – напряжение в композиционном материале;  $\sigma_f$  – напряжение в материале армирующих нитей;  $\sigma_m$  – напряжение в материале связующего;  $V_f$  – объем армирующих нитей в композиционном материале;  $V_m$  – объем связующего в композиционном материале.

Для решения поставленной задачи построения модели объемного заполнения 3D-ткани применим воксельный подход к описанию геометрической структуры 3D-ткани, описанной в [8], [9]. Тогда задача сводится к определению объема армирующих нитей, расположенных в пространстве по всем координатным осям в одном вокселе. В качестве упрощающего допущения примем три перекрещивающиеся группы

армирующих нитей с постоянными размерами поперечного сечения в форме круга. Постановка задачи графически представлена на рис. 1 (геометрическая модель вокселя с тремя армирующими нитями для процесса 3D-ткачества).

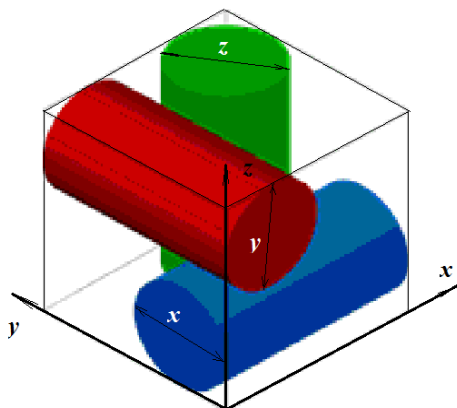


Рис. 1

Обозначим диаметры нитей  $x$ ,  $y$ ,  $z$ . Из рис. 1 следует, что длина нити диаметром  $x$  и, одновременно, размер вокселя по оси  $x$ , составляют  $y + z$ . Длина нити диаметром  $y$  и размер вокселя по оси  $y$  составляют  $x + z$ , а длина нити диаметром  $z$  и размер вокселя по оси  $z$  составляют  $x + y$ .

Тогда полный объем вокселя определится так:

$$V = (x + y)(y + z)(x + z), \quad (2)$$

Найдем производную данной функции

$$f'(x,y) = \frac{2[x + y + x^2 \cdot (y + 1) + y^2 \cdot (x + 1)]}{(x + 1) \cdot (y + 1) \cdot (x + y)^3} + \frac{x + y + x^2 \cdot (y + 1) + y^2 \cdot (x + 1)}{(x + 1) \cdot (y + 1)^2 \cdot (x + y)^2} +$$

$$\frac{x + y + x^2 \cdot (y + 1) + y^2 \cdot (x + 1)}{(x + 1)^2 \cdot (y + 1) \cdot (x + y)^2} + \frac{x + y + x^2 \cdot (y + 1) + y^2 \cdot (x + 1)}{(x + 1)^2 \cdot (y + 1)^2 \cdot (x + y)}$$

$$\frac{2 \cdot y \cdot (x + 1) + x^2 + 1}{(x + 1) \cdot (y + 1) \cdot (x + y)^2} - \frac{2 \cdot y \cdot (x + 1) + x^2 + 1}{(x + 1)^2 \cdot (y + 1) \cdot (x + y)}$$

$$\frac{2 \cdot x \cdot (y + 1) + y^2 + 1}{(x + 1) \cdot (y + 1) \cdot (x + y)^2} - \frac{2 \cdot x \cdot (y + 1) + y^2 + 1}{(x + 1) \cdot (y + 1)^2 \cdot (x + y)}$$

$$\frac{2 \cdot x + 2 \cdot y}{(x + 1) \cdot (y + 1) \cdot (x + y)}. \quad (6)$$

а суммарный объем нитей:

$$V_1 = \frac{\pi}{4} [(y + z)x^2 + (x + z)y^2 + (x + y)z^2]. \quad (3)$$

Для коэффициента заполнения получается следующее выражение:

$$K = V_1/V = \frac{\pi [(y + z)x^2 + (x + z)y^2 + (x + y)z^2]}{4(x + y)(y + z)(x + z)}. \quad (4)$$

Таким образом, получаем функцию трех переменных  $x$ ,  $y$  и  $z$ , для которой необходимо найти максимум. Чтобы несколько упростить решение, примем диаметр одной из нитей за константу, положив его равным единице. При этом  $x$  и  $y$  можно рассматривать как безразмерный диаметр, то есть отношение диаметров каждой из двух нитей к диаметру третьей. Можно также опустить множитель  $\pi/4$ , так как он влияет только на значение функции в точке максимума, но не влияет на его координаты  $x$  и  $y$ . Тогда соответствующая целевая функция примет вид:

$$f(x,y) = \frac{(y + 1)x^2 + (x + 1)y^2 + (x + y)}{(x + y)(y + 1)(x + 1)}. \quad (5)$$

по  $x$  и  $y$  в среде MathCAD:

Для нахождения экстремума функции (5) выражение (6) нужно приравнять к нулю и найти корни соответствующего уравнения. Однако MathCAD не может найти корни данного уравнения. Можно также воспользоваться функциями Maximize и Minimize, находящими точки максимума и минимума функции. Применяя их непосредственно к функции (5), получаем, что максимальное значение коэффициента заполнения вокселя нитью имеет место, если  $x$  и  $y$  равны нулю.

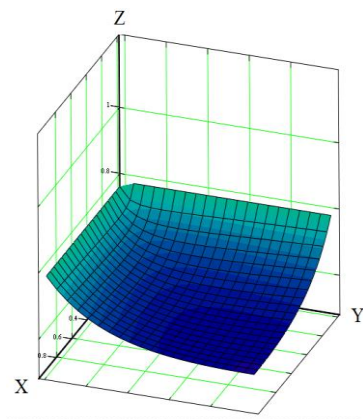


Рис. 2

Таким образом, для достижения максимального заполнения вокселя нитью необходимо, чтобы диаметры двух из трех нитей системы равнялись нулю, то есть были несоизмеримо меньше третьей нити, что на практике недостижимо и бессмысленно. Напротив, как показывает расчет в MathCAD, наименьший коэффициент заполнения получается при равенстве диаметров всех нитей системы.

Непосредственное наблюдение поверхности функции (4) (рис. 2 – поверхность функции коэффициента заполнения) подтверждает данный вывод. Однако в целом для данной модели вокселя область значений коэффициента заполнения составляет  $[0,589; 0,785]$ , то есть минимальный коэффициент заполнения, имеющий место при одинаковом диаметре всех нитей, составляет 75% от максимального. Если же две нити имеют одинаковый диаметр, то влияние диаметра третьей нити системы изменяет коэффициент заполнения в том же диапазоне (рис. 3 – изменение коэффици-

ента заполнения вокселя в зависимости от диаметра третьей нити при единичном диаметре двух других).

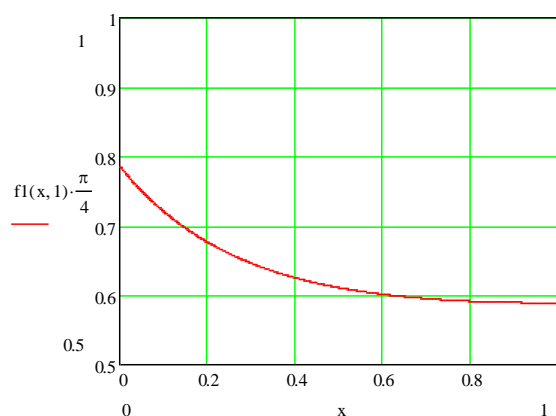


Рис. 3

Выполненные исследования целевой функции объемного заполнения вокселя тремя системами нитей, характерных для значения процесса 3D-ткачества, позволяют выбрать их линейных плотностей для обеспечения максимального значения в вокселе, а значит и во всей армирующей структуре композиционного материала или изделия.

## ВЫВОДЫ

Разработана и исследована математическая модель коэффициента заполнения вокселя армирующими нитями для 3D-ткачества, позволяющая выбрать оптимальные значения их линейных плотностей для обеспечения максимальной прочности композита.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Hull D., Clyne T.W. An introduction to composite materials. – Cambridge, 1981.
2. Daniel Isaac M., Ishai Ori. Engineering mechanics of composite materials. – New York, Oxford university press, 2006.
3. Guenther Lutz. The puck theory of failure in laminates in the context of the new guideline [Electronic resource] – 2014. // Access mode - <https://ru.scribd.com/document/346180392/VDI-PART-3-The-Puck-theory-of-failure-in-laminates-in-the-context-of-the-new-guideline-pdf>. Access date 21.05.2021.
4. Topal S., Ogin S., Crocombe A. Finite element modelling of a non-crimp 3-dorthogonal woven compo-

site // 11th world congress on computational mechanics (WCCM XI). – July 20 - 25, 2014.

5. *Behera B.K., Mishra R.* 3-dimensional weaving // Indian journal of fibre & textile research. – №33, 2008. P. 274...287.

6. *Fredrik S.* 3D-woven reinforcement in composites // KTH school of engineering sciences. – Stockholm, 2012.

7. *McHugh C.* Improving output rates of constant cross section carbon fiber woven 3D profiles. – 2011.

8. *Киселев А.М.* Разработка методологии проектирования геометрических структур и прогнозирования свойств текстильных материалов объемного строения: Дис. ... докт. техн. наук. – Казань, 2019.

9. *Балашов А.Б.* Методология расчета свойств композиционных материалов на основе 3D-тканых структур с использованием воксельного подхода // Изв. вузов. Технология текстильной промышленности. – 2021, №4. С. 195...203.

#### REFERENCES

1. Hull D., Clyne T.W. An introduction to composite materials. – Cambridge, 1981.

2. Daniel Isaac M., Ishai Ori. Engineering mechanics of composite materials. – New York, Oxford university press, 2006.

3. Guenther Lutz. The puck theory of failure in laminates in the context of the new guideline [Electronic resource] – 2014. // Access mode -

<https://ru.scribd.com/document/346180392/VDI-PART-3-The-Puck-theory-of-failure-in-laminates-in-the-context-of-the-new-guide-line-pdf>. Access date 05/21/2021.

4. Topal S., Ogin S., Crocombe A. Finite element modeling of a non-crimp 3-dorthogonal woven composite // 11th world congress on computational mechanics (WCCM XI). – July 20 - 25, 2014.

5. *Behera V.K., Mishra R.* 3-dimensional weaving // Indian journal of fiber & textile research. - No. 33, 2008. P. 274 ... 287.

6. *Fredrik S.* 3D-woven reinforcement in composites // KTH school of engineering sciences. – Stockholm, 2012.

7. *McHugh C.* Improving output rates of constant cross section carbon fiber woven 3D profiles. – 2011.

8. *Kiselev A.M.* Development of a methodology for designing geometric structures and predicting the properties of textile materials of a three-dimensional structure: Dis. ... doc. tech. Sciences. – Kazan, 2019.

9. *Balashov A.B.* Methodology for calculating the properties of composite materials based on 3D-woven structures using the voxel approach. Izv. universities. Technology of the textile industry. - 2021, No. 4. pp. 195...203.

Рекомендована заседанием научно-технического совета ООО НПО "ПК". Поступила 29.12.21.