

УДК 620.22-419  
DOI 10.47367/0021-3497\_2021\_6\_256

**ПРОЕКТИРОВАНИЕ ТОРОИДАЛЬНОГО КОМПОЗИТНОГО БАЛЛОНА  
ВЫСОКОГО ДАВЛЕНИЯ, ИЗГОТАВЛИВАЕМОГО  
МЕРИДИОНАЛЬНОЙ НАМОТКОЙ ВОЛОКОН**

**DESIGN OF THE TOROIDAL COMPOSITE PRESSURE VESSEL  
MADE BY MERIDIONAL WINDING OF FIBERS**

*Б.С. САРБАЕВ, В.В. МУРАВЬЕВ, С. ЧЖАН*

*B.S. SARBAYEV, V.V. MURAVYEV, X. ZHANG*

**(Московский государственный технический университет им. Н.Э.Баумана)**

**(Bauman Moscow Technical University)**

E-mail: bssarbayev@mail.ru; vasilij.muravyev@gmail.com; zxbmstu@qq.com

*Предложен способ проектного расчета композитного баллона высокого давления тороидальной формы при действии внутреннего давления. Рассматривается конструкция, изготавливаемая методом непрерывной намотки волокон вдоль меридиана баллона. При расчете геометрических характеристик и массы предполагается, что баллон является безмоментной*

*и равнопрочной оболочкой. Для волокнистого композиционного материала (КМ) применяется нитяная модель. Показано, что образующая баллона является плоской замкнутой линией, состоящей из двух гладких кривых, пересекающихся под острым углом. Соответствующая поверхность вращения является нерегулярной. С целью уменьшения изгибных напряжений в области нерегулярности предлагается устанавливать круговой шпангоут, изготавливаемый окружной намоткой волокон. Представлен численный пример, в котором рассчитываются геометрические и массовые характеристики баллона. Методом конечных элементов (МКЭ) выполнен поверочный расчет спроектированного композитного баллона. Показано, что установка кругового шпангоута позволяет существенно уменьшить величины изгибных напряжений в баллоне.*

*A method for design calculation of the toroidal composite pressure vessel subjected to internal pressure is proposed. A structure reinforced along the meridians by using meridional continuous winding of fibers is discussed. The vessel is considered as a non-moment and isotensoid shell when analyzing its geometric and mass characteristics. The monotropic material model is used for fibrous composite material (FCM). It is shown that the shell meridian is a plane closed line consisting of two smooth curves and intersecting at an acute angle. The corresponding surface of the revolution is irregular. The installation of a circular frame made by circumferential winding of fibers allows one to reduce the bending stresses in the area of irregularity. A numerical example is presented in which the geometric and mass characteristics of the pressure vessel are calculated. A verification calculation of the designed composite pressure vessel is performed by employing the finite element method (FEM). The obtained results show that the installation of a circular frame can significantly reduce the values of bending stresses in the pressure vessel.*

**Ключевые слова:** тороидальный композитный баллон, равнопрочность, образующая, шпангоут, меридиональная намотка, метод конечных элементов.

**Keywords:** toroidal composite pressure vessel, isotension, shell meridian, frame, meridional winding, finite element method.

#### *Введение*

Баллоны высокого давления тороидальной формы востребованы в ракетно-космической технике, в конструкциях гражданского назначения, например, для хранения рабочего тела на борту космического аппарата, в дыхательных аппаратах для спасательных служб. При этом применение волокнистых КМ и технологии непрерывной намотки позволяет получить конструкции меньшей массы по сравнению с металлическими аналогами [1]. В силу особенностей геометрической формы тороидального баллона можно достичь рациональной компоновки разрабатываемого изделия.

Теоретические основы расчета и проектирования композитных баллонов изло-

жены в работах [2...4]. В них предполагается, что баллон является равнопрочной безмоментной оболочкой вращения, нагруженной внутренним давлением; для волокнистого КМ применяется нитяная модель. Рассматриваются баллоны различной формы. В работах [1], [4...6] получены расчетные формулы для тороидальных баллонов. В [7], [8] для проверки расчетных соотношений применяется МКЭ. Как правило, основное внимание уделяется расчету конструкций из многослойных КМ, содержащих слои с симметричным перекрестным армированием и кольцевые слои.

Следует отметить, что в отличие от баллонов давления с цилиндрической частью изготовление баллонов тороидальной

формы с симметричным перекрестным армированием достаточно трудоемкий процесс, требующий применения специализированного намоточного оборудования [1]. Однако процесс изготовления можно существенно упростить, воспользовавшись намоткой волокон вдоль меридиана баллона. Такая технология во много аналогична технологии, применяемой в электротехнике для изготовления катушек с тороидальным сердечником [9].

Целью настоящей статьи является разработка способа проектного расчета геометрических и массовых параметров равнопрочного композитного баллона тороидальной формы, изготавливаемого меридиональной намоткой волокон. Отметим, что весьма близкое по смыслу решение задачи для сферической оболочки, образованной нерастяжимыми и уложенными вдоль меридиана нитями, было предложено в [10].

#### Метод решения

Для определения формы образующей баллона воспользуемся соотношениями безмоментной теории оболочек вращения при осесимметричном нагружении. Расчетной нагрузкой является внутреннее давление  $p$ . Основные геометрические параметры показаны на рис. 1-а. Меридиональная погонная сила  $T_1$  находится из условия равновесия элемента баллона MN (рис. 1-б). На рис. 1 показана форма образующей тороидального баллона при меридиональной намотке (а); к определению меридиональной погонной силы (б).

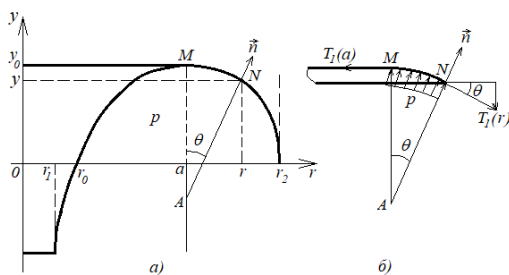


Рис. 1

В результате получаем

$$T_1 = \frac{p(r^2 - a^2)R_2}{2r^2}. \quad (1)$$

Для окружной погонной силы в силу известного равенства

$$\frac{T_1}{R_1} + \frac{T_2}{R_2} = p$$

будем иметь

$$T_2 = T_1 \left( \frac{2r^2}{r^2 - a^2} - \frac{R_2}{R_1} \right). \quad (2)$$

В формулах (1) и (2)  $R_1, R_2$  – радиусы кривизны меридиана и параллели баллона соответственно;  $a$  – абсцисса вершины образующей  $y_0$  (рис. 2-а);  $r$  – радиус кругового сечения.

В предлагаемом способе расчета несущей способностью связующего будем пренебрегать, то есть волокна, образующие баллон, не связаны между собой в окружном направлении. Тогда, используя условие равнопрочности баллона, можно записать, что

$$T_1(r) = F_{+1}h(r), \quad (3)$$

где  $F_{+1}$  – предел прочности однонаправленного волокнистого КМ при растяжении вдоль волокон,  $h(r)$  – толщина баллона в рассматриваемом сечении. Для окружной погонной силы принимаем:

$$T_2(r) = 0. \quad (4)$$

В случае непрерывной меридиональной намотки волокон справедливы следующие равенства:

$$rh(r) = r_1h_{01} = r_2h_{02}. \quad (5)$$

Здесь  $h_{01}$  и  $h_{02}$  – толщина баллона при  $r = r_1$  и  $r = r_2$  соответственно. Тогда из соотношения (1) и условия равнопрочности получим

$$h_{01} = \frac{p(a^2 - r_1^2)}{2F_{+1}r_1}, \quad h_{02} = \frac{p(r_2^2 - a^2)}{2F_{+1}r_2}. \quad (6)$$

Из равенств (5) и (6) следует зависимость:

$$a^2 = \frac{r_1^2 + r_2^2}{2}. \quad (7)$$

Радиусы  $R_1$  и  $R_2$  в системе координат, показанной на рис. 1-а, выражаются через уравнение образующей  $y=y(r)$  следующим образом [4]:

$$\frac{1}{R_1} = -\frac{y''}{(1+y'^2)^{3/2}}, \quad \frac{1}{R_2} = -\frac{y'}{r\sqrt{1+y'^2}}. \quad (8)$$

Используя зависимости (8), а также равенства (2), (4), получим следующее дифференциальное уравнение относительно функции  $y=y(r)$ :

$$\frac{y''}{y'(1+y'^2)^2} = \frac{2r}{r^2 - a^2}.$$

Решив это уравнение относительно производной  $y'$  и учитывая, что при  $r = r_2$   $y' \rightarrow -\infty$ , после преобразований с учетом (7) будем иметь:

$$y' = -\frac{r^2 - a^2}{\sqrt{(r_2^2 - r^2)(r^2 - r_1^2)}}. \quad (9)$$

Отсюда видно, что при  $r = a$  функция достигает экстремального значения  $y_0$ , а при  $r = r_1$  и  $r = r_2$  имеют место вертикальные асимптоты (рис. 1-а).

Из уравнения (9) можно получить зависимость для определения угла  $\theta$  между нормалью  $\vec{n}$  и осью вращения баллона  $OY$ . После преобразований получим:

$$\sin\theta = \frac{r^2 - a^2}{r_2^2 - a^2}. \quad (10)$$

Как видно, должно быть  $|\theta| \leq \pi/2$ .

Уравнение (9) можно решить численно, воспользовавшись, например, системой MathCad. Его решение можно записать

также с помощью эллиптических интегралов I и II рода  $E(\varphi, k)$  и  $F(\varphi, k)$ . Оно имеет следующий вид:

$$y(r) = r_2 \left[ E(\varphi, k) - \frac{a^2}{r_2^2} F(\varphi, k) \right]. \quad (11)$$

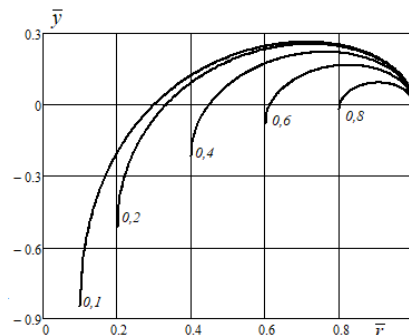


Рис. 2

Здесь

$$E(\varphi, k) = \int_0^\varphi \sqrt{1 - k^2 \sin^2 t} dt, \quad F(\varphi, k) = \int_0^\varphi \frac{dt}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 t}}.$$

В равенстве (11) использованы следующие обозначения:

$$\varphi(r) = \arcsin \left( \sqrt{\frac{r_2^2 - r^2}{r_2^2 - r_1^2}} \right), \quad k = \frac{\sqrt{r_2^2 - r_1^2}}{r_2}.$$

Как видно, при  $r = r_1$  получаем  $\varphi = \pi/2$ ; при  $r = r_2$   $\varphi = 0$ . В формуле (11) учтено, что  $y(r_2) = 0$ . На рис. 2 в безразмерных координатах  $\bar{r} = r/r_2$  и  $\bar{y} = y/r_2$  изображены образующие тороидального баллона для разных значений параметра  $c = r_1/r_2$ .

При проектировании баллона интерес представляют геометрические параметры  $r_0$  и  $r_2$  – радиусы малого и большого экваторов,  $y_0$  – высота баллона,  $V$  – объем внутренней полости, а также  $M_{\text{км}}$  – масса используемого КМ. Радиус  $r_0$  можно определить, решив нелинейное алгебраическое уравнение  $y(r_0)=0$ . Высота  $y_0$  определяется из равенства  $y_0=y(a)$ . Для определения объема внутренней полости используем выражение

$$V = \pi \int_{r_0}^{r_2} r^2 y'(r) dr.$$

$$V = \frac{\pi}{3} r_2 \left[ a^2 E(\varphi_0, k) - r_1^2 F(\varphi_0, k) \right] + \frac{\pi}{3} r_0 \sqrt{(r_2^2 - r_0^2)(r_0^2 - r_1^2)}, \quad (12)$$

где  $\varphi_0 = \varphi(r_0)$ . Здесь и далее в силу симметрии величины  $y_0, V$  определены для половины баллона при  $y(r) > 0$  (рис. 3-а).

На рис. 3 показаны: – сечение равнопрочного тороидального композитного баллона (а): 1 – образующая, 2 – шпангоут; к уравнению равновесия шпангоута (б).

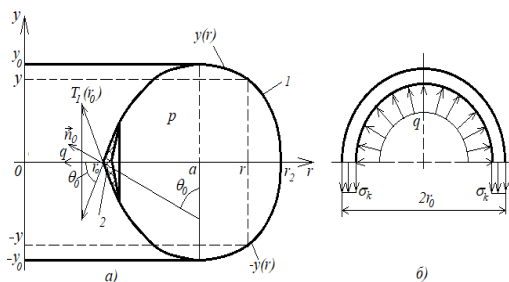


Рис. 3

Анализ уравнения (11) показывает, что образующая баллона представляет собой замкнутую плоскую негладкую линию. Она состоит из двух гладких кривых  $y(r)$  и  $-y(r)$ , пересекающихся под острым углом при  $r = r_0$ . (рис. 3-а). Поэтому в этой области баллона при нагружении внутренним давлением следует ожидать значительных изгибных напряжений. Для их восприятия в конструкцию предлагается ввести кольцевой композитный шпангоут, который может быть изготовлен в процессе окружной намотки. Такой силовой шпангоут будет воспринимать не только окружные, но меридиональные силы.

Для определения площади поперечного сечения шпангоута воспользуемся соотношениями для безмоментной оболочки вращения. Из рис. 3-а видно, что на шпангоут в его плоскости будет действовать растягивающая погонная нагрузка, определяемая по формуле  $q = 2T_1(r_0) \cos \theta_0$ .

Величина меридиональной погонной силы  $T_1(r_0)$  и угол  $\theta_0$  рассчитываются по формулам (1) и (10) при  $r=r_0$ . При этом учи-

Подставляя в это выражение равенство (9), после интегрирования получим следующую зависимость:

тывается, что  $R_2 = r/\sin \theta$ . В итоге получим:

$$q = \frac{p(a^2 - r_0^2)}{r_0} \operatorname{ctg} \theta_0.$$

Из условия равновесия шпангоута и рис. 3-б следует, что

$$\sigma_k = p \frac{a^2 - r_0^2}{F_{\text{ш}}} \operatorname{ctg} \theta_0,$$

где  $\sigma_k$  – кольцевое растягивающее напряжение в шпангоуте,  $F_{\text{ш}}$  – площадь поперечного сечения шпангоута. При расчетном давлении должно быть  $\sigma_k = F_{+1}$ . Тогда принимая во внимание равенство (10), получим искомую зависимость

$$F_{\text{ш}} = \frac{P}{F_{+1}} \sqrt{(r_2^2 - r_0^2)(r_0^2 - r_1^2)}. \quad (13)$$

Отметим, что с помощью формулы (13) можно определить ориентировочное значение площади поперечного сечения шпангоута. Его действительная геометрическая форма определяется из условия максимальной прочности и требуемого значения массы баллона.

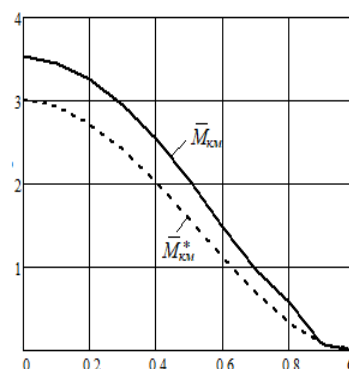


Рис. 4

Определим суммарную массу баллона  $M_{\text{км}}$ . Понятно, что  $M_{\text{км}} = M_{\text{км}}^* + M_{\text{ш}}$ , где  $M_{\text{км}}^*$  – масса баллона без шпангоута,  $M_{\text{ш}}$  –

$$M_{\text{км}}^* = 2\pi\rho_{\text{км}} \int_{r_0}^{r_2} rh(r)\sqrt{1+y'^2} dr, \quad M_{\text{ш}} = 2\pi r_0 \frac{\rho\rho_{\text{км}}}{F_{+1}} \sqrt{(r_2^2 - r_0^2)(r_0^2 - r_1^2)},$$

где  $\rho_{\text{км}}$  – плотность применяемого КМ.

масса композитного шпангоута. Указанные величины вычисляются по формулам

Отсюда с учетом (9) получаем:

$$M_{\text{км}} = 2\pi r_0 \frac{\rho\rho_{\text{км}}}{F_{+1}} \left[ \sqrt{(r_2^2 - r_0^2)(r_0^2 - r_1^2)} + \frac{(r_2^2 - r_1^2)^2}{4r_0 r_2} F(\varphi_0, k) \right]. \quad (14)$$

На рис. 4 показаны графики зависимости суммарной массы баллона  $M_{\text{км}}$  и массы баллона без шпангоута  $M_{\text{км}}^*$  от параметра  $s$ . При этом введены безразмерные величины:

$$\bar{M}_{\text{км}} = M_{\text{км}}/\kappa, \quad \bar{M}_{\text{км}}^* = M_{\text{км}}^*/\kappa,$$

где  $\kappa = \rho\rho_{\text{км}} r_2^3 / F_{+1}$ .

*Численный пример и обсуждение*

В качестве примера выполним расчет геометрических параметров и массы углепластикового баллона. Для радиуса большого экватора примем  $r_2 = 0,5$  м, при этом пусть  $s = r_1/r_2 = 0,3$ , расчетное давление  $p = 75$  МПа. Из (11) и (12) получаем  $r_0 \approx 0,191$  м,  $y_0 \approx 0,12$  м,  $V \approx 0,061$  м<sup>3</sup>. Для углепластика принимаем  $F_{+1} = 1500$  МПа,  $\rho_{\text{км}} = 1500$  кг/м<sup>3</sup>. Тогда получим, что  $\kappa \approx 9,5$  кг. Из графика на рис. 4 следует, что  $M_{\text{км}} \approx 9,5 \cdot 2,93 \approx 27,8$  кг, при этом для шпангоута имеем  $M_{\text{ш}} \approx (2,93 - 2,4) \cdot 9,5 = 5,0$  кг, что составляет  $\approx 18\%$  от массы баллона в целом.

Поверочный расчет спроектированного тороидального баллона выполнен с помощью МКЭ, реализованного в программном комплексе Siemens Femap / NX Nastran. Были использованы осесимметричные кольцевые оболочечные элементы с тремя степенями свободы в узловой окружности. Для проверки результатов применялись также осесимметричные, трехмерные, че-

тырехугольные элементы с шестью степенями свободы в узле. Задача была решена в линейной постановке.

Для однонаправленного углепластика были заданы следующие характеристики упругости: модуль упругости при растяжении вдоль и поперек волокон соответственно  $E_1 = 140$  ГПа,  $E_2 = 8$  ГПа; модуль сдвига в плоскости армирования  $G_{12} = 0,6$  ГПа, коэффициент Пуассона  $\nu_{12} = 0,3$ .

На рис. 5 представлена образующая баллона: 1 – недеформированное состояние; 2 – деформированное состояние без шпангоута; 3 – деформированное состояние со шпангоутом; 4 – форма поперечного сечения шпангоута.

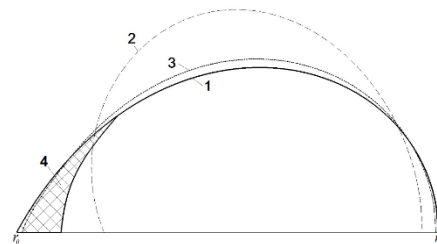


Рис. 5

На рис. 6 (меридиональные напряжения в баллоне: 1, 2 – на внешней и внутренней поверхностях соответственно со шпангоутом; 3, 4 – на внешней и внутренней поверхностях соответственно без него) в масштабе показана образующая баллона в исходном и деформированном состояниях. Максимальный прогиб для баллона без шпангоута имеет место при  $r_m \approx 330$  мм и ра-

вен  $w_{\max} \approx 5,1h(r_m)$ . Для баллона со шпангоутом было получено  $w_{\max} \approx 0,73h(r_{sh})$ , где  $r_{sh} \approx 344$  мм. Наличие шпангоута существенно влияет на деформированное состояние баллона.

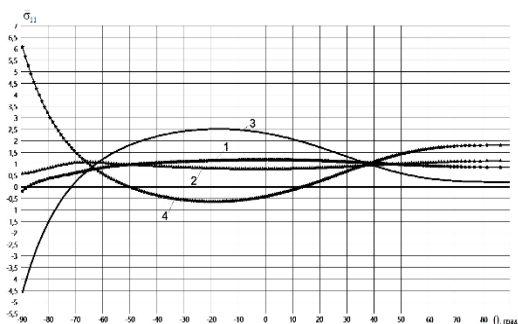


Рис. 6

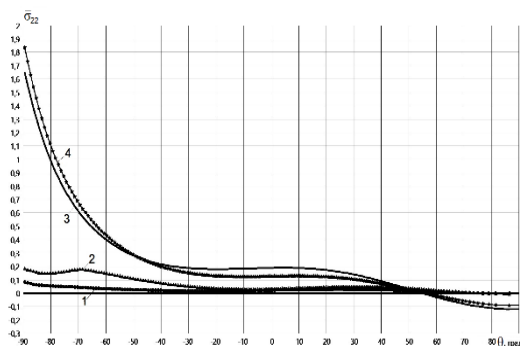


Рис. 7

Расчеты показали, что представленная на рис. 7 (окружные напряжения в баллоне: 1, 2 – на внешней и внутренней поверхностях соответственно со шпангоутом; 3, 4 – на внешней и внутренней поверхностях соответственно без шпангоута) конструкция шпангоута обеспечивает существенное снижение изгибных напряжений в области малого экватора баллона. При этом площадь поперечного сечения шпангоута соответствовала значению, полученному по формуле (14). Для среднего растягивающего напряжения в шпангоуте было получено значение  $\approx 0,8F_{+1}$ . На рис. 6 и 7 приведены эпюры меридиональных  $\sigma_{11}$  и окружных  $\sigma_{22}$  напряжений для баллона со шпангоутом и без него. По оси ординат отмечены величины  $\bar{\sigma}_{11} = \sigma_{11}/F_{+1}$  и  $\bar{\sigma}_{22} = \sigma_{22}/F_{+1}$ .

Как и следовало ожидать, установка шпангоута обеспечивает уменьшение изгибных напряжений в баллоне со шпангоутом по сравнению с баллоном без шпангоута. При этом в баллоне со шпангоутом напряженное состояние становится близким к безмоментному. Основную нагрузку воспринимают волокна, работающие на растяжение в направлении армирования. На большей части баллона получили напряжения, примерно равные  $F_{+1}$ . В направлении поперек волокон напряжения практически отсутствуют. Такое напряженное состояние однонаправленного КМ соответствует гипотезам, которые выражаются формулами (3) и (4).

## ВЫВОДЫ

1. Рассмотрена конструкция баллона давления тороидальной формы, изготавливаемого меридиональной намоткой. Показано, что образующей такого баллона является плоская замкнутая негладкая линия. Для увеличения его прочностных характеристик в области нерегулярности предлагается устанавливать кольцевой шпангоут, изготовленный методом окружной намотки.

2. На основе гипотезы равнопрочности предложен вариант расчетных формул для определения образующей тороидального баллона высокого давления, армированного волокнами в меридиональном направлении. Расчеты могут быть выполнены как с применением современных программных средств, так и с помощью аналитических зависимостей, записанных с помощью эллиптических интегралов.

3. Предложенные расчетные соотношения апробированы на примере проектирования баллона с заданными параметрами. Проверочный расчет, выполненный с помощью МКЭ в линейной постановке, показал, что установка композитного шпангоута в области малого экватора существенно влияет на напряженно-деформированное состояние баллона. Перемещения в баллоне уменьшаются, а напряженное состояние

становится близким к безмоментному. Основную нагрузку воспринимают волокна, работающие на растяжение.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Комков М.А., Тарасов В.А. Технология намотки композитных конструкций ракет и средств поражения. – М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2011.
2. Образцов И.Ф., Васильев В.В., Бунаков В.А. Оптимальное армирование оболочек вращения. – М.: Машиностроение, 1977.
3. Васильев В.В., Мороз Н.Г. Композитные баллоны давления: проектирование, расчет, изготовление и испытания. – М.: Машиностроение, 2015.
4. Vasiliev V.V. Composite pressure vessels. Analysis, design, manufacturing. – Blacksburg. Bull Ridge Publishing, 2009.
5. Mitkevich A.B., Kul'kov A.A. Design optimization and forming methods for toroidal composite shells. Mechanics of Composite Materials. – V.4, №2, 2006. P.95...108.
6. Lei Zub, Sotiris Koussios, Adriaan Beukers, Dinghua Zhang. Development of Filament Wound Composite Isotensoidal Pressure Vessels//Polymers & Polymer Composites. – V. 22, №3, 2014. P. 227...232.
7. Haixiao Hu, Shuxin Li, Jihui Wang, Lei Zu. Structural design and experimental investigation on filament wound toroidal pressure vessels//Composite Structures. – 2015, March. V.121. P.114...120.
8. Matthew J. Vick, Kurt Gramoll. Finite Element Study on the Optimization of an Orthotropic Composite Toroidal Shell//Journal of Pressure Vessel Technology. – Vol. 134, 2012. October. P. 051201-1 - 051201-7.
9. Ларин В.П. Технология намотки в приборо- и электроаппаратостроении. – СПб.: Изд-во СПбГУАП, 2003.
10. Феодосьев В.И. Избранные задачи и вопросы по сопротивлению материалов. – М.: Наука, Физматлит, 1996.

#### REFERENCES

1. Komkov M.A., Tarasov V.A. Winding technology for composite structures of missiles and weapons. - M.: Publishing house of MSTU im. N.E. Bauman, 2011.
2. Obratsov I.F., Vasiliev V.V., Bunakov V.A. Optimal reinforcement of shells of revolution. - M.: Mashinostroenie, 1977.
3. Vasiliev V.V., Moroz N.G. Composite pressure cylinders: design, calculation, manufacture and testing. – M.: Mashinostroenie, 2015.
4. Vasiliev V.V. Composite pressure vessels. Analysis, design, manufacturing. - Blacksburg. Bull Ridge Publishing, 2009.
5. Mitkevich A.B., Kul'kov A.A. Design optimization and forming methods for toroidal composite shells. Mechanics of Composite Materials. – V.4, №2, 2006. P.95...108.
6. Lei Zub, Sotiris Koussios, Adriaan Beukers, Dinghua Zhang. Development of Filament Wound Composite Isotensoidal Pressure Vessels//Polymers & Polymer Composites. – V. 22, No. 3, 2014. P. 227...232.
7. Haixiao Hu, Shuxin Li, Jihui Wang, Lei Zu. Structural design and experimental investigation on filament wound toroidal pressure vessels//Composite Structures. – 2015, March. V.121. P.114...120.
8. Matthew J. Vick, Kurt Gramoll. Finite Element Study on the Optimization of an Orthotropic Composite Toroidal Shell//Journal of Pressure Vessel Technology. – Vol. 134, 2012. October. P. 051201-1 - 051201-7.
9. Larin V.P. Winding technology in instrumentation and electrical apparatus engineering. - SPb.: Publishing house of SPbGUAP, 2003.
10. Feodosiev V.I. Selected tasks and questions on the strength of materials. – M.: Nauka, Fizmatlit, 1996.

Рекомендована кафедрой химически аппаратов и ракетносителей. Поступила 24.09.21.