

## МОДЕЛИРОВАНИЕ АДГЕЗИОННОГО КОНТАКТА В ОДНОНАПРАВЛЕННЫХ КОМПОЗИТАХ

### MODELING OF ADHESIVE CUTTING IN ONE-DIRECTIONAL COMPOSITES

П.В. КОРОЛЕВ, А.Ю. МАТРОХИН, М.А. ШИЛОВ, С.В. КОРОЛЕВА  
P.V. KOROLEV, A.YU. MATROKHIN, M.A. SHILOV, S.V. KOROLEVA

(Ивановский государственный энергетический университет,  
Ивановский государственный политехнический университет,  
Ивановская государственная медицинская академия,  
Вятский государственный университет)

(Ivanovo State Power University,  
Ivanovo State Politechnical University,  
Ivanovo State Medical Academy,  
Vyatka State University)

E-mail: vedunking@mail.ru

*В работе рассмотрено получение модели влияния адгезивного воздействия на прочность однонаправленного композита. Получена зависимость усилия вырывания одиночной нити из матрицы при заданных геометрических параметрах и известных физико-механических характеристиках компонентов.*

*The article under review considers the obtaining of adhesive action model effect on the strength of a unidirectional composite. The dependence of the pulling force of a single thread from the matrix is obtained for the given geometric parameters and the known physical and mechanical characteristics of the components.*

**Ключевые слова:** композит, адгезия, модель, модуль адгезии, модуль Юнга, мононить, матрица.

**Keywords:** composite, adhesion, model, adhesion module, oung's modulus, monofilament, matrix.

#### *Введение*

Закономерности адгезии и роль этого явления в обеспечении прочности полимерных композиционных материалов (ПКМ) исследуются на стыке различных областей наук: физической химии и химии высокомолекулярных соединений, физики твердого тела, классической механики, математической статистики и др. Волокнистые ПКМ представляют собой сложные системы, состоящие из армирующих волокон и полимерной матрицы (или связующего компонента).

Прочность таких материалов зависит от целого ряда физико-химических и технологических факторов, часто тесно связанных друг с другом. Ключевую роль в обеспечении прочности волокнистых композитов играет адгезионная прочность соединения "волокно-матрица" в элементарной ячейке композита. В данной работе представлена модель расчета параметров адгезионного взаимодействия однонаправленного композита [1].

Воспользуемся векторной формой записи энергетического баланса данной сис-

темы. Поскольку основной задачей работы ПКМ является отсутствие между его составляющими трения и наличие адгезии, то энергетический баланс такой системы равен:

$$L = A - U - W_A, \quad (1)$$

где  $A$  – работа внешней нагрузки  $P$ , приложенной к сечению границ элементарной ячейки, Дж;  $U$  – потенциальная энергия системы, Дж;  $W_a$  – энергия адгезионного взаимодействия структурных элементов ПКМ, Дж, равная сумме энергий адгезии матрицы  $W_1$  и мононити –  $W_2$ :

$$W_a = W_1 + W_2. \quad (2)$$

В свою очередь распишем

$$W_1 = \frac{1}{2} \int_S M_1 \left( \frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 dx, \quad (3)$$

где  $M_1$  – параметр, отвечающий за адгезионные свойства конкретного материала (модуль адгезии матрицы), Дж/м;  $S$  – контактная поверхность, м<sup>2</sup>;  $w$  – перемещение, м.

*Постановка задачи*

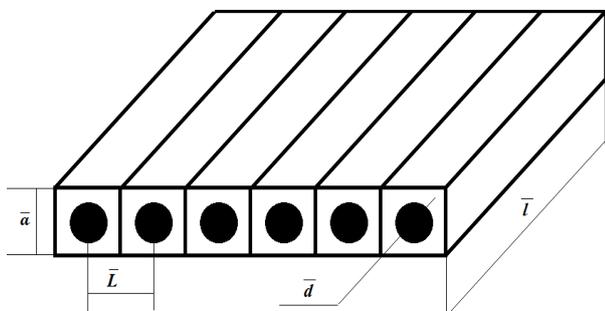


Рис. 1

В качестве объекта моделирования выбрано контактное взаимодействие мононити и матрицы. Модель простого однонаправленного композита [2] представлена на рис. 1 (конструктивная модель однонаправленного композита, где  $\bar{d}$  – средний диаметр мононити;  $\bar{L}$  – среднее расстояние между центрами осей мононити;  $\bar{a}$  – средняя высота элементарной ячейки композита;  $\bar{l}$  – средняя длина

элементарной ячейки). Для упрощения расчетов примем, что материал матрицы с параметрами  $E_1, \nu_1, G_1$  является изотропным и однородным и материал мононити ( $E_2, \nu_2, G_2$ ) также изотропен и однороден [3]. Для определения объемной доли армирующих элементов в матрице, которая может достигать 90%, необходимо знать только два параметра: средний диаметр мононити и среднее расстояние между их осями.

Задача исследования заключается в обосновании применения и математическом описании нового параметра – модуля адгезии, который позволит проводить экспресс-оценку адгезионных свойств композиционных текстильных материалов в системе "волокно-матрица" в зависимости от геометрических и физико-механических параметров этой системы.

*Методы*

Согласно простейшей микромоделли слоистого однонаправленного композита [4], учитывающей исключительно объемное содержание мононитей в матрице и не учитывающей их форму и расположение, существует величина, называемая коэффициентом армирования  $\Psi$ , равная отношению объема мононитей в матрице. Тогда

$$\Psi = \frac{a_1}{a}, \quad (4)$$

$$1 - \Psi = \frac{a_2}{a}, \quad (5)$$

где  $a_1$  – ширина армирующего слоя, мм;  $a_2$  – ширина матрицы, мм.

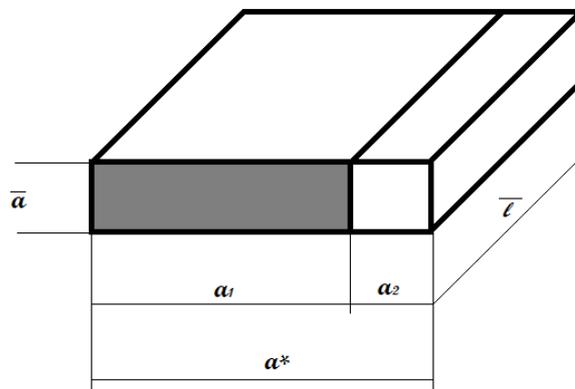


Рис. 2

Существуют три вида базовых испытаний материалов на прочность: растяжение-сжатие, кручение, изгиб. Все остальные являются их комбинациями. При построении модели рассмотрим один из видов испытаний на прочность ПКМ – растяжение. Растягивающую нагрузку  $P$  приложим вдоль оси мононитей, тогда энергетическое состояние ячейки композита схематично можно представить на рис. 2 (схематичная модель ячейки однонаправленного композита).

Аналогично (3) запишем уравнение для определения энергии мононити:

$$W_2 = \frac{1}{2} \int_S M_2 \left( \frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 dx. \quad (6)$$

Потенциальная энергия ПКМ  $U$  складывается из упругой энергии растяжения и упругой энергии сдвига:

$$L = A - \frac{1}{2} \iint \left( E^* \left( \frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 + G^* \left( \frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 \right) dx dy - \frac{1}{2} \int_S M_1 \left( \frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 dx - \frac{1}{2} \int_S M_2 \left( \frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 dx. \quad (9)$$

Для решения энергетического уравнения Лагранжа воспользуемся прямым методом нахождения краевых задач (метод Ритца) с целью выбора варьируемой вариационной функции. Это решение найдем для случая отсутствия адгезии в контакте, то есть:

$$L = A - \frac{1}{2} \iint \left( E^* \left( \frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 + G^* \left( \frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 \right) dx dy. \quad (10)$$

$$\varepsilon = P \frac{a}{E_2 a_2 + E_1 a_1} = \frac{P}{\frac{E_2 a_2}{a} + \frac{E_1 a_1}{a}} = \frac{P}{E_2(1-\psi) + E_1 \psi} = \frac{P}{E}, \quad (11)$$

$$E_2(1-\psi) + E_1 \psi = E, \quad (12)$$

$$\varepsilon = \frac{P}{E}, \quad S^* = \bar{a} a^*, \quad p = \frac{F_{\text{раст}}}{S^*} = \frac{F_{\text{раст}}}{\bar{a} \cdot a^*}, \quad (13)$$

$$\varepsilon = \frac{F_{\text{раст}}}{\bar{a} \cdot a^* \cdot E}, \quad (14)$$

$$w(x, y) = x \varepsilon = x \frac{P}{E} = x \frac{F_{\text{раст}}}{\bar{a} \cdot a^* \cdot E}. \quad (15)$$

В отсутствии адгезии разрушаться будет либо матрица, либо мононить. Тогда будут выполняться стандартные условия

$$U = \frac{1}{2} \iint \left( E^* \left( \frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 + G^* \left( \frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 \right) dx dy, \quad (7)$$

где  $E^*$  – модуль упругости (Юнга) 1-го рода для ПКМ, МПа;  $G^*$  – модуль упругости 2-го рода для ПКМ, МПа. В свою очередь:

$$E^* = \begin{cases} E_1, & 0 \leq y \leq a_2, \\ E_2, & a_2 \leq y \leq a, \end{cases} \quad (8)$$

$$G^* = \begin{cases} G_1, & 0 \leq y \leq a_2, \\ G_2, & a_2 \leq y \leq a. \end{cases}$$

В общем виде энергетический баланс такой системы равен разности энергий, затрачиваемой на совершение работы по адгезионному разрушению ПКМ и энергии сопротивления системы, равной сумме энергий (упругой и адгезионной):

Представим функцию перемещения  $w = w(x, y)$  и наложим на нее граничные условия такие, что модули Юнга первого и второго рода ( $E^*$  и  $G^*$ ) были кусочно-постоянными. Исходя из этого предположения и учитывая приложенную к ячейке однонаправленного композита растягивающую силу  $F_{\text{раст}}$ , решение уравнения для одноосного растяжения будет иметь вид:

прочности: для мононити:  $[\sigma_1] \geq \frac{P \cdot E_1}{E}$ ; для матрицы:  $[\sigma_2] \geq \frac{P \cdot E_2}{E}$ .

Для того чтобы учесть адгезионное взаимодействие монокити и матрицы, нам

$$L = A - \frac{1}{2} \iint \left( E^* \left( \frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 + G^* \left( \frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 \right) dx dy - \frac{1}{2} \int_S M_1 \left( \frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 dx - \frac{1}{2} \int_S M_2 \left( \frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 dx. \quad (16)$$

Для упрощения вида уравнения преобразуем его, проинтегрировав внутреннюю

$$L = \bar{\ell} \int_{a_2}^a \left( p\varepsilon - \frac{1}{2} E\varepsilon^2 - \frac{G\bar{\ell}}{24} (\varepsilon')^2 \right) dy - \frac{(M_1 - M_2)\bar{\ell}\varepsilon^2}{a_2}. \quad (17)$$

Применив принцип Лагранжа [5], заключающийся в равновесии произвольной механической системы, полученной идеальными двухсторонними связями, если

$$\bar{\ell} \int_{a_2}^a \left( p - E\varepsilon + \frac{G\bar{\ell}^2}{24} \varepsilon'' \right) \delta\varepsilon dy - \left( (M_1 - M_2)\varepsilon + \frac{G\bar{\ell}^2}{12} \varepsilon' \right) \bar{\ell} \delta\varepsilon \Big|_{a_2} = 0. \quad (18)$$

Условиями равновесия для монокити и матрицы из полученного уравнения являются равенства нулю первого слагаемого:

$$\begin{cases} (p - E_1\varepsilon_1 + \frac{G_1\bar{\ell}_1^2}{12}\varepsilon_1'') = 0, \\ (p - E_2\varepsilon_2 + \frac{G_2\bar{\ell}_2^2}{12}\varepsilon_2'') = 0. \end{cases} \quad (19)$$

Вводя замену переменных  $\frac{G_2\bar{\ell}_2^2}{12E_2} = b_2^2$ ,  $\frac{G_1\bar{\ell}_1^2}{12E_1} = b_1^2$  в полученные дифференциальные уравнения второго порядка (19), имеем систему

$$\begin{cases} \frac{p}{E_1} - \varepsilon_1 + b_1^2\varepsilon_1'' = 0, \\ \frac{p}{E_2} - \varepsilon_2 + b_2^2\varepsilon_2'' = 0. \end{cases} \quad (20)$$

В силу осевой симметрии ПКМ при решении уравнений нечетные решения убираем из рассмотрения. Поэтому

$$\begin{cases} \varepsilon_1 = 1 + C^* \frac{\text{ch}(b_1 y)}{\text{ch}(b_1 a_1)}, \\ \varepsilon_2 = 1 + C^{**} \frac{\text{ch}(b_2 y - a)}{\text{ch}(b_2 a_2)}. \end{cases} \quad (21)$$

Тогда искомое перемещение запишем в виде:

необходимо решить полное уравнение энергетического баланса:

функцию по переменной  $x$  в пределах от 0 до  $\bar{\ell}$ . В результате интегрирования получим

сумма работ всех действующих на систему сил на возможных перемещениях системы равняется нулю ( $\delta L = 0$ ), получим:

$$w = w(x, y) = px \begin{cases} \frac{1}{E_1} \left[ 1 + C^* \frac{\text{ch}(b_1 y)}{\text{ch}(b_1 a_1)} \right], \\ \frac{1}{E_2} \left[ 1 + C^{**} \frac{\text{ch}(b_2 y - a)}{\text{ch}(b_2 a_2)} \right] \end{cases} \quad (22)$$

Для нахождения констант интегрирования  $C^*$  и  $C^{**}$  используем следующие граничные условия:

а) скорости деформаций на границах элементарной ячейки равны нулю:

$$\frac{G_1\bar{\ell}_1^2}{12} \varepsilon_1'(0) = 0, \quad (23)$$

$$\frac{G_2\bar{\ell}_2^2}{12} \varepsilon_2'(a) = 0. \quad (24)$$

б) в слое матрицы деформации  $\varepsilon_1$  и  $\varepsilon_2$  равны  $\varepsilon_1(a_2) = \varepsilon_2(a_2) = \varepsilon$ .

Условие сдвига:

$$\frac{\bar{\ell}_2^2}{12} (G_2\varepsilon_2' - G_1\varepsilon_1') = -(M_2 - M_1). \quad (25)$$

Разность сдвигов матрицы и монокити противоположна по знаку и равна разности адгезионных модулей. Подставив граничные условия (23) в общее решение, получим константы интегрирования:

$$C^* = E_1 \frac{\varepsilon}{p} - 1, \quad (26)$$

$$C^{**} = E_2 \frac{\varepsilon}{p} - 1. \quad (27)$$

Значение относительной деформации будем искать по выражению:

$$\varepsilon = \varepsilon(a_2) = p \frac{a_2 \frac{\text{th}(a_2 b_1)}{a_2 b_1} + a_1 \frac{\text{th}(a_1 b_2)}{a_1 b_2}}{E_2 a_2 \frac{\text{th}(a_2 b_1)}{a_2 b_1} + E_1 a_1 \frac{\text{th}(a_1 b_2)}{a_1 b_2} + (M_1 + M_2)}. \quad (28)$$

Разделив все на числитель, получим приближенное решение:

$$\varepsilon = \varepsilon(a_2) \approx p \frac{1}{E_2(1-\psi) + E_1\psi + \frac{(M_1 + M_2)}{a^*}}. \quad (29)$$

Итоговое уравнение для определения перемещений равно

$$w(x, y) = x \left\{ \begin{array}{l} \varepsilon \frac{\text{ch}(b_1 y)}{\text{ch}(b_1 a_2)} + \frac{p}{E_1} \left( 1 - \frac{\text{ch}(b_1 y)}{\text{ch}(b_1 a_2)} \right), \\ \varepsilon \frac{\text{ch}(b_2(y-a))}{\text{ch}(b_2 a_1)} + \frac{p}{E_2} \left( 1 - \frac{\text{ch}(b_2(y-a))}{\text{ch}(b_2 a_1)} \right). \end{array} \right. \quad (30)$$

### Результаты и обсуждение

Учитывая условия равновесия, определим максимальные напряжения при растя-

жении и сдвиге для модели, учитывающей адгезию (табл.1).

Т а б л и ц а 1

Нормальные напряжения (растяжение)	Касательные напряжения (сдвиг)
Для мононити $\sigma(y) = \frac{E_1 \cdot w}{x}$	Для мононити $\tau(y) = \frac{G_1 \cdot w}{x}$
Для матрицы $\sigma(y) = \frac{E_2 \cdot w}{x}$	Для матрицы $\tau(y) = \frac{G_1 \cdot w}{x}$
Максимальное значение напряжений	
$\sigma_{1\max} = \frac{E_1 \cdot w(x, y)}{x} \approx \frac{E_1 p}{(E_1 a_1 + E_2 a_2 + M^*)} = \frac{E_1 p}{\gamma}$ $\gamma = E_1 a_1 + E_2 a_2 + M^*$ $\sigma_{2\max} = \frac{E_2 \cdot w(x, y)}{x} \approx \frac{E_2 p}{\gamma}$	$\tau_{2\max} = \frac{G_1 \cdot w(x, y)}{x} \approx \frac{12 p a_2  (E_2 - E_1) a_1 - M^* }{\ell  E_1 a_1 + E_2 a_2 + M^* } =$ $= \frac{12 p a_2  \beta }{\ell \gamma}$ $\beta = (E_2 - E_1) a_1 - M^*$ $\tau_{1\max} \approx \frac{12 p a_1  \beta }{\ell \gamma}$

Силу адгезии определим как произведение разности ее модулей на деформацию:

$$F_A = M^* \varepsilon = M^* \frac{a_2 \frac{\text{th}(a_2 b_1)}{a_2 b_1} + a_1 \frac{\text{th}(a_1 b_2)}{a_1 b_2}}{E_2 a_2 \frac{\text{th}(a_2 b_1)}{a_2 b_1} + E_1 a_1 \frac{\text{th}(a_1 b_2)}{a_1 b_2} + M^*}. \quad (31)$$

В пределе (при  $\frac{\text{th}(a_2 b_1)}{a_2 b_1} \rightarrow 1$  и  $\frac{\text{th}(a_1 b_2)}{a_1 b_2}$

→ 1) сила адгезии примет вид:

$$F_A = M^* \frac{a_2 + a_1}{E_2 a_2 + E_1 a_1 + M^*} = \frac{M^* \cdot a}{\gamma}. \quad (32)$$

Определим условия прочности ПКМ с учетом адгезии и без учета адгезии (табл. 2).

Т а б л и ц а 2

С учетом адгезии	Без учета адгезии
$\frac{E_1 p}{\gamma} \leq [\sigma_1]$	$E_1 \varepsilon \leq [\sigma_1]$
$\frac{E_2 p}{\gamma} \leq [\sigma_2]$	$E_2 \varepsilon \leq [\sigma_2]$
$\frac{12 p a_1  \beta }{\ell \gamma} \leq [\tau_1]$	$0 \leq [\tau_1]$

$\frac{12pa_2 \beta }{\ell\gamma} \leq [\tau_2]$	$0 \leq [\tau_2]$
$\frac{M^*}{\gamma h} \leq [\sigma_{12}]$	$0 \leq [\sigma_{12}]$
$h = \bar{a}$	

Определим выражение искомого модуля адгезии. Для этого проведем теоретический эксперимент. При одноосном растяжении результирующая сила  $F^*$  складывается из трех компонентов:

$$F_1 + F_2 + F_A = F^*, \quad (33)$$

где  $F_1$ ,  $F_2$ ,  $F_A$  – сила растяжения нити, сила растяжения матрицы и адгезионная сила соответственно.

С учетом подстановки  $F^* = p \cdot a$  и выражений (4), (5), (12), (13), (14), (31) получим:

$$E_1 \varepsilon a \psi + E_2 \varepsilon a (1 - \psi) + M^* \varepsilon = pa. \quad (34)$$

Тогда модуль адгезии запишем в виде:

$$M^* = \frac{pa}{\varepsilon} - a(E_1 \psi + E_2(1 - \psi)). \quad (35)$$

## ВЫВОДЫ

Таким образом, явление адгезии сведено в один параметр – модуль адгезии, зависящий от геометрических и физико-механических параметров системы, что позволит проводить экспресс-оценку адгезионных свойств материалов в сравнении с различными комбинациями параметров системы, будь то изменение толщины или формы нити, или изменение материалов наполнителя. Зная среднестатистические параметры напряжения, деформации, объемную долю мононитей в матрице и экспериментально определенные модули упругости первого рода для мононити и матрицы, можно определить параметр адгезии для контактной пары ПКМ. Конкретные свойства адгезионной пары зависят от процесса ее изготовления, поэтому даже в рамках нескольких образцов может существовать разница.

Дальнейшее развитие работы заключается в верификации результатов модели с практическим экспериментом, т.е. в определении силы вырывания одиночного волокна из изотропной однородной матрицы. Данное исследование позволит установить влияние допущения при идеальном взаимодействии волокно-наполнитель.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Нильсен Л., Бабаевский П.Г. Механические свойства полимеров и полимерные композиции. – М.: Химия, 1978.
2. Барабанщикова И.С., Смирнова Т.В., Карева Т.Ю. Композиционные материалы на текстильной основе // Междунар. научн.-практич. конф.: Текстильная химия: традиции и новации-2019 (Мельниковские чтения). – Иваново: ИГХТУ, 2019.
3. Карева Т.Ю. Особенности строения и тенденции развития структур текстильных полотен как основы композиционных материалов // Физика волокнистых материалов: структура, свойства, наукоемкие технологии и материалы (SMARTEX). – Иваново: ИВГПУ, 2016, № 1 (2). С. 25...30.
4. Scardino F. An introduction to textile structures and their behaviour Chou T.W., Ko F.K. (Eds.), Textile structural composites, chapter 1, composite materials series, vol. 3, Elsevier Science Publishers, Oxford (1989). P. 1...26.
5. Ko F. Textiles Composites for Automotive Structural Components, in Textile Advances in the Automotive Industry, ed. by R. Shishoo (Woodhead Publishing, Cambridge, 2008).

## REFERENCES

1. Nielsen L., Babaevsky P.G. Mechanical properties of polymers and polymer compositions. – M.: Chemistry, 1978.
2. Barabanshchikova I.S., Smirnova T.V., Kareva T.Yu. Composite materials on a textile basis // Intern. scientific-practical Conf.: Tech-Style Chemistry: Traditions and Innovations-2019 (Melnikov Readings). – Ivanovo: IGHTU, 2019.
3. Kareva T.Yu. Features of the structure and trends in the development of structures of textile fabrics as the basis of composite materials // Physics of fibrous materials: structure, properties, high technologies and materials (SMARTEX). – Ivanovo: IVGPU, 2016, No. 1 (2). S. 25...30.
4. Scardino F. An introduction to textile structures and their behavior Chou T.W., Ko F.K. (Eds.), Textile structural composites, chapter 1, composite materials series, vol. 3, Elsevier Science Publishers, Oxford (1989). P. 1...26.

5. Ko F. Textiles Composites for Automotive Structural Components, in *Textile Advances in the Automotive Industry*, ed. by R. Shishoo (Woodhead Publishing, Cambridge, 2008).

Рекомендована кафедрой материаловедения, товароведения, стандартизации и метрологии ИВГПУ.  
Поступила 25.10.21.

---