

УДК 687

DOI 10.47367/0021-3497_2023_2_176

**ПОЛУЧЕНИЕ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ ПЛОСКОЙ РАЗВЕРТКИ
ПОЛУСФЕРИЧЕСКОЙ АРМИРУЮЩЕЙ ОБОЛОЧКИ***

**OBTAINING A MATHEMATICAL MODEL OF A HEMISPHERICAL REINFORCING
SHELL FLAT DEVELOPMENT**

Т.В. РУДНЕВА¹, А.А. ПРИВАЛОВ², Е.М. БАЗАЕВ¹, Г.П. ЗАРЕЦКАЯ¹, Е.П. ТАМБОВЦЕВА¹

T.V. RUDNEVA¹, A.A. PRIVALOV², E.M. BAZAEV¹, G.P. ZARETSKAYA¹, E.P. TAMBOVTSEVA¹

¹ (Российский государственный университет им. А.Н. Косыгина,

²Московский автомобильно-дорожный государственный технический университет, Россия)

(Kosygin Russian State University,
State Technical University – MADI)

E-mail: rudneva.tv@yandex.ru, a_privalov@bk.ru, bazaevem@mail.ru, zaretskaya-gp@rguk.ru,
tambovtseva-ep@rguk.ru

В статье представлены разработки, относящиеся к методам проектирования и изготовления швейных оболочек сложной пространственной формы. Одним из наиболее актуальных направлений в этой области является получение форм, близких к геометрическим параметрам человеческого тела, что делает армирующие оболочки адаптированными для изготовления средств индивидуальной защиты тела. К наиболее важным требованиям относится сохранение целостности оболочки в процессе производства и эксплуатации. При изготовлении оболочек, полученных на основе сети меридианов и параллелей, в полюсной области оболочки из-за сходимости нескольких меридианов появляется излишняя толщина, снижается технологичность изделия и процесса. Для решения поставленной задачи получения оболочки с постоянной толщиной в полюсной области применены методы математического моделирования для построения схемы полусферических оболочек с перераспределением меридианов.

The article presents developments relating to design and fabrication method of complex spatial shape sewn shells. One of the promising research areas is to obtain shapes close to geometric parameters of the human body, which makes the reinforcing shells adaptable for manufacture of individual body protection means. The most important requirements include maintaining the integrity of the shell during production and operation. During shell manufacturing on the basis of a

*Исследование выполнено при финансовой поддержке РФФИ в рамках научных проектов № 19-29-13044 и № 20-31-90116.

mesh of meridians and parallels, in the polar area of the shell, due to the convergence of several meridians, excessive thickness appears, reducing the manufacturability of both the product and the process. To solve the problem of obtaining the shell with equal thickness in polar area, we applied methods of mathematical modeling of hemispherical shells with meridians redistribution.

Ключевые слова: швейные оболочки, нерегулярная структура, природные оболочки, математическое описание, сеть меридианов и параллелей, плоская развертка, формообразование, схема армирования.

Keywords: sewn shells, irregular structures, natural shells, mathematical description, mesh of meridians and parallels, flat development, shell forming, reinforcement pattern.

Сферические оболочки и приближенные к ним оболочки сложной пространственной формы используются в разных областях промышленности. Достижение требуемой формы оболочки и готового изделия возможно с использованием как традиционных методов формообразования, так и инновационных, основанных на особенностях нерегулярной структуры оболочки.

Наиболее перспективным в этой области является проектирование армированных оболочек с нерегулярной структурой, а также со структурой природных оболочек, поскольку они обладают наилучшим соотношением массы и прочности. В природе существует множество примеров армированных 2D (крылья насекомых, листья растений, паутина) и 3D структур (кость человека, стебель бамбука, кость каракатицы, пчелиные соты и др.). Легкие сетчатые оболочки, созданные по образцу структур природных объектов и состоящие из взаимосвязанных нитей (жилок), образующих стороны ячеек, представляют собой новый класс высокоэффективных материалов [1], [2].

Целью исследования является разработка математического аппарата построения плоской развертки равнотолщинной полусферической армирующей оболочки.

С этой точки зрения наибольший интерес представляют армированные оболочки на основе сети меридианов и параллелей, имеющие аналоги в природе. Возникающее утолщение в центральной части при изготовлении оболочки в соответствии с

такой сетью приводит к снижению технологических показателей за счет пересечения нескольких нитей в одной точке. Сеть меридианов и параллелей позволяет решить эту задачу без усложнения технологии. В данной работе представлен метод проектирования армирующих оболочек вращения с постоянной толщиной в полюсной области на основе сети меридианов и параллелей.

Подобные сети меридианов и параллелей встречаются в природе – в паутине пауков-кругопрядов, имеют схожую структуру: прочные нити, образующие основной каркас паутины; якорные нити, соединяющие каркас с опорой в окружающей среде; радиальные нити, ловчая спираль и ступица. Ступица является центром паутины и может иметь отверстие (рис. 1, а) или представлять собой участок шелковых нитей, соединенных между собой (рис. 1, б) [3]. Поэтому в природе проблема сходящихся меридианов решается путем распределения нитей в полюсной области.

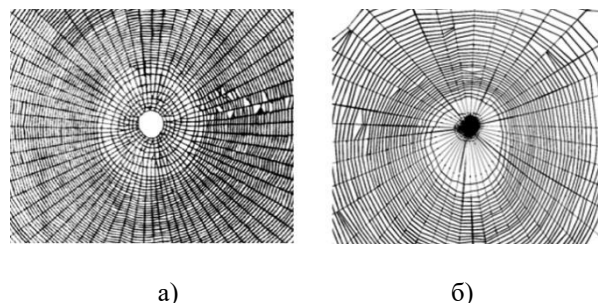


Рис. 1

Задачи проектирования оболочки с постоянной толщиной в полюсной области в

данном исследовании решаются методами математического моделирования и графического построения разверток в среде MathCAD. Полученные модели предполагается использовать для проектирования и изготовления оболочек швейными методами. Наиболее перспективным способом изготовления разработанной оболочки на сегодняшний день является техническая вышивка, в том числе тафтинг.

Предлагаемая структура сети с постоянной толщиной в полусферической области схематично выглядят следующим образом (рис. 2).

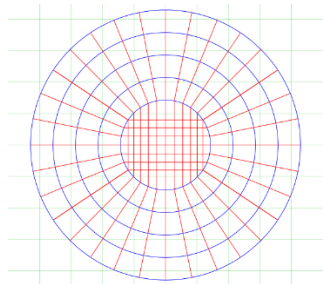


Рис. 2

В такой оболочке, начиная с экватора и до заданной параллели, сохраняется сферическая структура, далее незаконченные меридианы соединяются отрезками окружностей (рис. 3).

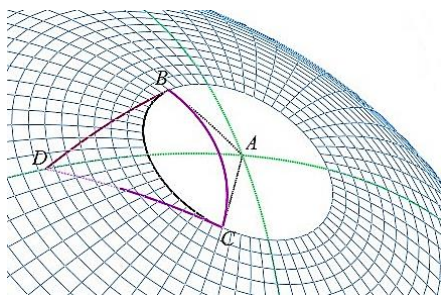


Рис. 3

На рис. 3 для треугольника ABC, образованного отрезками меридианов AB и AC (A – полюс сферы) и отрезком параллели BC, строится сферический треугольник DBC, у которого дуги DB и DC перпендикулярны дугам AB и AC соответственно. Тогда сторона BC будет касаться дуг AB и AC и, следовательно, будет являться непрерывным продолжением меридианов, подходящих к точкам B и C.

Точку D находим по специальной формуле:

$$D = B \cos t_0 + \frac{B \times A}{|B \times A|} \sin t_0, \quad (1)$$

где D, B и A – радиус-векторы точек D, B и A, а параметр t_0 определяется по формуле:

$$t_0 = \arctg \frac{(1 - B \cdot C) |B \times C|}{(B \times C) \cdot C}. \quad (2)$$

Используя этот метод, можно получить полюсные области с равномерным или неравномерным распределением нитей.

Предложенный подход позволяет спроектировать армирующий каркас оболочки, который в той или иной мере должен стать частью изделия в виде детали из волокнистого материала [6], [7]. В этом случае нити с различными свойствами в одном и том же материале могут придать готовому изделию желаемые свойства, такие, как прочность, жесткость, эластичность, проводимость и т.д.

Передовые технологии позволяют комбинировать несколько швейных методов, получая материал с новыми свойствами. Например, в одном изделии можно совместить высокую жесткость и гибкость, а также улучшить механические характеристики и снизить стоимость производства [8].

Для дальнейшего развития технологии изготовления армирующей оболочки целесообразно сочетать традиционные текстильные способы со швейными, такими, как тафтинг, техническая вышивка, прошивка. Возможно использование сухого или мокрого валяния, в процессе которого армирующую оболочку помещают между слоями волокнистого холста, закрепляя желаемую форму и обеспечивая ее стабильность, что представляет интерес для применения в качестве защитных накладок для бронежилетов и специальной одежды [6].

Сочетание швейных технологий и технологий нетканых материалов позволит изготавливать детали переменной толщины со сложной конфигурацией поверхности.

Основным недостатком применения традиционных швейных технологий для изготовления таких оболочек является

сложность получения деталей с требуемой толщиной, как равномерной, так и переменной [9, 10].

Прошивка является самым простым швейным методом получения армирующих оболочек и не требует значительных затрат, так как для прошивки подходит традиционное оборудование [10]. Процесс прошивки имеет свои недостатки, главным из которых является снижение механических свойств материала при растяжении, сжатию, сдвиге и т.д. При прокалывании иглой происходит локальное повреждение волокон и деформация ткани, что снижает механические характеристики изделия [7, 10, 11].

Разновидностью прошивки является техническая вышивка. В этом процессе армирующий элемент располагается по траектории хода вышивальной головки и пришивается к поверхности ткани-основы. С помощью современных вышивальных машин с компьютерным управлением можно точно прокладывать армирующую нить по довольно сложным траекториям [10].

Значительный интерес представляет технология трехмерного армирования оболочек тафтинговым швом, при котором армирующие нити различных типов вводятся в основу перпендикулярно поверхности почти без повреждений материала. В качестве материала основы могут использоваться тканые или нетканые материалы. Кроме того, преимуществом тафтинга является низкая истираемость нити, по сравнению с прошивкой. Технология тафтинга позволяет не только скреплять слои оболочки под любыми углами, но и закреплять в заданном положении нити стежка на поверхности.

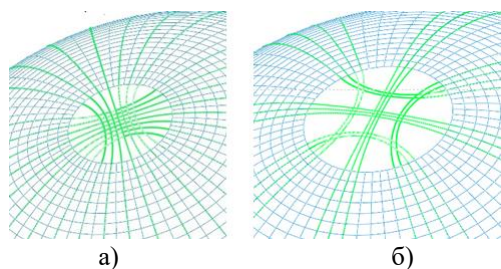


Рис. 4

Согласно предложенному методу можно проектировать оболочки как с отдельными

нитями, так и с пучком нитей, распределенных в полюсной области (рис. 4). В этом случае полюсная область будет иметь отверстие, как в ступице колесовидной природной паутины.

Для построения развертки сети на плоскость сначала рассмотрим криволинейный четырехугольник PQRS (рис. 5, а).

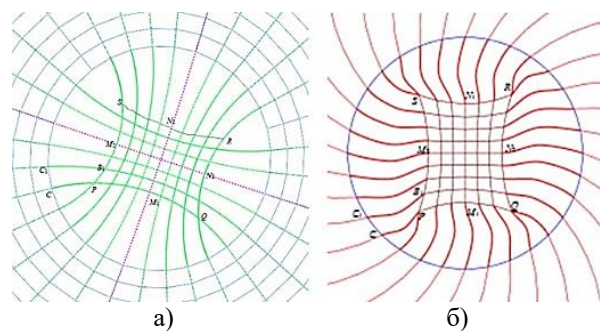


Рис. 5

Найдем длины сторон четырехугольника PQRS и длины сторон ячеек, покрывающих область PQRS.

Затем построим на плоскости перпендикулярные отрезки (основа и уток) M_1N_1 и M_2N_2 . Далее, как и при построении сетей Чебышева, по найденным длинам ячеек строим развертку четырехугольника PQRS на плоскость (рис. 5, б).

Соединяем узлы на окружности (заданной параллели $\theta = \theta_0$) с соответствующими узлами четырехугольника PQRS специальными кривыми так, чтобы склейка в узлах была гладкой (без изломов) и их длины были равны соответствующим дугам на сфере.

Поскольку изготовление сетчатой оболочки должно осуществляться в рамках одного процесса производства, необходимо разработать схему армирования непрерывной нитью.

Возвращаясь к схематичному изображению сети на рис. 2, заметим, что она представляет собой связный плоский граф. Все вершины этого графа имеют степень 4 (число ребер, выходящих из вершины), кроме вершин, лежащих на внешней окружности, – все они имеют степень 3. Поэтому этот граф не является эйлеровым графом, так как не содержит эйлеров цикл. Напомним, что эйлеров путь – это путь,

проходящий по всем ребрам графа и при этом только по одному разу. Эйлеров цикл – эйлеров путь, являющийся циклом, то есть замкнутый путь, проходящий через каждое ребро графа ровно по одному разу. Эйлеров граф – граф, содержащий эйлеров цикл. Полуэйлеров граф – граф, содержащий эйлеров путь.

Иными словами, нельзя построить этот граф одним этапом или изготовить сеть одной нитью (лентой). Л. Эйлер доказал, что это можно сделать тогда и только тогда, когда все вершины имеют четную степень (в полуэйлеровом графе ровно две вершины могут иметь нечетную степень).

Однако следующая конфигурация уже является эйлеровым графом (рис. 6, а).

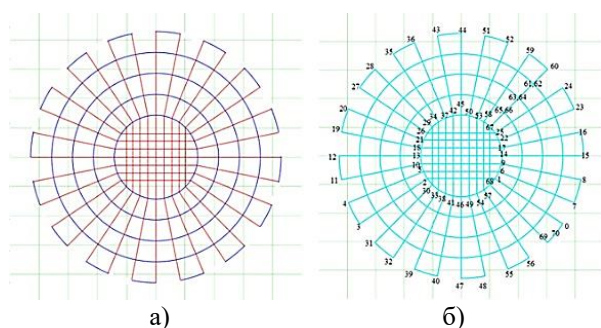


Рис. 6

Схему, соответствующую эйлерову циклу, можно построить, переходя от точки к точке по номерам (рис. 6, б).

Таким образом, в соответствии с предложенной последовательностью вышивки весь рисунок армирования может быть выполнен одной непрерывной нитью.

Анализ существующих швейных методов изготовления армирующих оболочек показывает, что постоянно возрастающая сложность конструкций и предъявляемые к ним требования диктуют направления развития методов армирования и совершенствования оборудования. Все рассмотренные технологии армирования позволяют получать более прочные и легкие армированные конструкции по сравнению с традиционными швейными технологиями.

В области проектирования инновационных армирующих конструкций все большее развитие получает применение геометрических принципов природных

оболочек. С использованием структурных особенностей, присущих природным материалам и формам, становится возможным разработать новые подходы к проектированию конструктивных изделий с улучшенными прочностными и весовыми характеристиками, поскольку природные объекты обладают уникальными характеристиками, включающими эффективное использование материала и распределение усилий при значительной структурной прочности.

На свойства природных оболочек, как и текстильных материалов, влияет геометрическая структура, а их сложность и разнообразие позволяют найти новые подходы к проектированию швейных оболочек с улучшенными эксплуатационными свойствами [12].

Как уже упоминалось выше, сеть меридианов и параллелей похожа на колесовидную паутину. Метод проектирования полюсной области в таких оболочках заключается в схождении меридианов в одной точке или создании отверстия на полюсе [12].

Ранее исследования в области проектирования сферических оболочек были сосредоточены на конструкциях с отверстием в полюсной области (рис. 7), поскольку технологически это проще выполнить [13, 14].

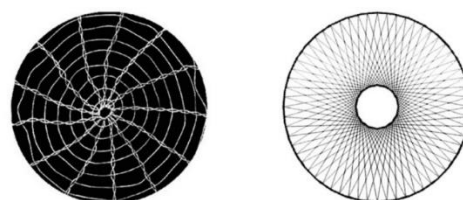


Рис. 7

В другом случае получается чрезмерная толщина (рис. 8).



Рис. 8

Сравнительный анализ радиально-кольцевых структур позволил установить,

что вариант проектирования полюсной области оболочки с отверстием может привести к снижению прочности, так как в этом случае меридианы имеют обрыв. В другом случае меридианы проходят через всю оболочку, но сходятся на полюсе в одной точке и создают таким образом излишнюю толщину. Снижение толщины за счет удаления некоторых меридианов также приведет к снижению прочности.

Предлагаемый метод проектирования позволяет при изготовлении получать сферические оболочки с одинаковой толщиной и плотностью нитей в полюсной области, что может найти применение в производстве технических изделий, бронежилетов и специальной одежды, головных уборов, купольных и других конструкций [15].

Требуемая прочность готового изделия обеспечивается, наряду с другими факторами, сохранением целостности армирующей нити, что достигается ее непрерывностью при прокладывании методами прошивки или технической вышивки. Сохранение целостности нетканой оболочки может быть достигнуто также включением в структуру крепежных элементов, упорядочением структуры волокнистого слоя за счет использования полуфабрикатов войлока, таких, как префельт или ровница, и закреплением структуры готовых деталей путем пропитки жидкими полимерами.

Таким образом, предложен метод проектирования и изготовления сетчатой равнотолщинной сферической оболочки, заключающийся в перераспределении меридианов в полюсной области с сохранением их числа и формировании оболочки одной непрерывной нитью, что позволяет улучшить ее прочностные свойства.

ВЫВОДЫ

1. Выявлено, что для армирования оболочек сложной пространственной формы различного назначения используются волокнистые материалы с разной структурой: отдельные волокна, нити, ткани, нетканые материалы, полученные с использованием традиционных текстильных технологий, включая валяние, и швейных, полочивших широкое применение в послед-

нее время, таких, как тафтинг, техническая вышивка.

2. Определены предпосылки получения комбинированных текстильных материалов, в создании которых задействованы различные технологии производства, чтобы обеспечить новые сочетания свойств оболочки. Использование тех или иных комбинаций технологий определяется назначением оболочки.

3. Обозначены проблемы изготовления полусферических оболочек на основе сети меридианов и параллелей, заключающиеся в образовании области излишней толщины в точке схождения меридианов, что снижает технологичность, или отверстия, ухудшающего целостность и прочностные свойства.

4. Предложен математический аппарат построения схемы полусферической оболочки, имеющей равную толщину в полюсной области за счет перераспределения меридианов. Разработаны схема и траектория настрачивания армирующей непрерывной нити сферической оболочки, соответствующие Эйлерову графу и Эйлерову циклу.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Thiyagarajan K.* Bio Inspired Light weight Composite Material Design for 3D Printing. Master Thesis. South Dakota State University, 2017.
2. *Mirzaani M.J.* Using Bio-Inspired design elements in the fabrication of cellular materials with special properties and functionalities. Doctoral Dissertation. Politecnico di Milano, Department of Mechanical Engineering, Milano, Italia, 2017.
3. *Blackledge T., Kuntner M., Agnarsson I.* The Form and Function of Spider Orb Webs // *Advances in Insect Physiology*. 2011, 41, p. 175...262.
4. *Zschokke S.* Form and Function of the orb-web // *European Arachnology*. 2000, p. 99...106.
5. *Zschokke S.* Structure, building and evolution of spider webs. Электронный ресурс: <https://bio.staern.li/research.php?lang=en>
6. *Тамбовцева Е.П., Зарецкая Г.П., Руднева Т.В., Мезенцева Т.В.* Применение армирующих основ при изготовлении волокнистых наполнителей для деталей одежды из композиционных материалов // *Наука – Технологии – Производство. Light Conf 2021: матер. междунар. науч.-техн. конф., 29-31 марта 2021 г.* СПб.: СПбГУПТД, 2021.
7. *Зарецкая Г.П., Базаев Е.М., Руднева Т.В., Лунина Е.В.* Технологии трехмерного армирования текстильными и швейными методами конструкций

из полимерных композиционных материалов // Изв. вузов. Технология текстильной промышленности. 2021. № 6. С. 107...115.

8. Inoda M., Sugimoto K., Nakai A. & Hamada H. Mechanical Properties of Textile Hybrid Composite. Composites technologies for 2020 // Proceedings of the Fourth Asian-Australasian Conference on Composite Materials (ACCM-4). University of Sydney, Australia, 6-9 July, 2004.

9. Донецкий К.И., Раскутин А.Е., Хиллов П.А., Лукьяненко Ю.В., Белинис П.Г., Коротыгин А.А. Объемные текстильные преформы, используемые при изготовлении полимерных композиционных материалов (обзор) // Труды ВИАМ. 2015. №9.

10. Tong L., Mouritz A.P., Bannister M.K. 3D fibre reinforced polymer composites. Elsevier Science Ltd., Oxford, 2002.

11. Mouritz A.P., Leong K.H., Herszberg I. A review of the effect of stitching on the in-plane mechanical properties of fibre-reinforced polymer composites // Composites Part A. Applied Science and Manufacturing. 1997, 28. Is. 12. P. 979...991.

12. Руднева Т.В. Разработка метода проектирования швейных изделий по принципу строения природных оболочек: дис. ... канд. техн. наук. М.: МГУДТ, 2015.

13. Frontczak-Wasiak I., Snycerski M., Ciesielska I. Textile Structures Modeled on a Spider's Net // Fibres and Textiles in Eastern Europe. 2008, 16. P. 54...58.

14. Feng P., Ye, Lie-ping, Teng, J.G Large-Span Woven Web Structure Made of Fiber-Reinforced Polymer // Journal of composites for construction. 2007. March/April.

15. Тамбовцева Е.П., Зарецкая Г.П. Проектирование изменяемых элементов пакета материалов для создания универсальных средств индивидуальной защиты // Изв. вузов. Технология текстильной промышленности. 2021. №5. С. 175...179.

REFERENCES

1. Thiyagarajan K. Bio Inspired Lightweight Composite Material Design for 3D Printing. Master Thesis. South Dakota State University, 2017.

2. Mirzaani M.J. Using Bio-Inspired design elements in the fabrication of cellular materials with special properties and functionalities. Doctoral Dissertation. Politecnico di Milano, Department of Mechanical Engineering, Milano, Italia, 2017.

3. Blackledge T., Kuntner M., Agnarsson I. The Form and Function of Spider Orb Webs // Advances in Insect Physiology. 2011, 41, p. 175...262.

4. Zschokke S. Form and Function of the orb-web // European Arachnology. 2000, p. 99...106.

5. Zschokke S. Structure, building and evolution of spider webs. Retrieved from <https://bio.staern.li/research.php?lang=en>

6. Tambovtseva E.P., Zaretskaya G.P., Rudneva T.V., Mezentseva T.V. Application of reinforcing frameworks in the manufacture of fiber fillers for clothing parts made of composite materials // Proceedings of the International Scientific and Technical Conference Light Conf 2021 «Science – Technologies – Production», 29-31 march 2021. SPb.: SPSUITD, 2021.

7. Zaretskaya G.P., Bazaev E.M., Rudneva T.V., Lunina E.V. Technologies of 3D reinforcement by textile and sewing methods of constructions from polymer composite materials // Izvestiya Vysshikh Uchebnykh Zavedenii, Seriya Tekhnologiya Tekstil'noi Promyshlennosti. 2021. № 6(396). P. 107...115.

8. Inoda M., Sugimoto K., Nakai A. & Hamada H. Mechanical Properties of Textile Hybrid Composite. Composites technologies for 2020 / Proceedings of the Fourth Asian-Australasian Conference on Composite Materials (ACCM-4). University of Sydney, Australia, 6-9 July, 2004.

9. Donetskij K.I., Raskutin A.E., Hilov P.A., Luk'yanenko Yu.V., Belinis P.G., Korotygin A.A. Volumetric textile preforms used in the production of polymer composites (review) // Electronic scientific journal «Proceedings of VIAM». 2015. №9.

10. Tong L., Mouritz A.P., Bannister M.K. 3D fibre reinforced polymer composites. Elsevier Science Ltd., Oxford, 2002.

11. Mouritz A.P., Leong K.H., Herszberg I. A review of the effect of stitching on the in-plane mechanical properties of fibre-reinforced polymer composites // Composites Part A. Applied Science and Manufacturing. 1997. Vol. 28. Is. 12. Pp. 979...991.

12. Rudneva T.V. Development of a design method of garments based on the principle of natural shell structure: thesis PhD of technical sciences: 05.19.04 defense. 23.11.15. M.: MSUBT, 2015.

13. Frontczak-Wasiak I., Snycerski M., Ciesielska I. Textile Structures Modeled on a Spider's Net // Fibres and Textiles in Eastern Europe. 2008. Vol.16. Pp. 54...58.

14. Feng P., Ye, Lie-ping, Teng J. G. Large-Span Woven Web Structure Made of Fiber-Reinforced Polymer // Journal of composites for construction. March/April, 2007.

15. Tambovtseva E.P., Zaretskaya G.P. Variable elements of a material package design for the creation of universal personal protective equipment // Izvestiya Vysshikh Uchebnykh Zavedenii, Seriya Tekhnologiya Tekstil'noi Promyshlennosti. 2021. №5(395). P. 175...179.

Рекомендована кафедрой художественного моделирования, конструирования и технологии швейных изделий РГУ им. А.Н. Косыгина. Поступила 21.01.23.