

УДК 677.057

DOI 10.47367/0021-3497_2025_1_193

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ КРИВЫХ КОНТАКТА ВАЛКОВ

MATHEMATICAL MODELS OF ROLL CONTACT CURVES

Ш.Р. ХУРРАМОВ¹, Н.У. АННАЕВ², Ш.И. ХУРРАМОВ³, К.Ю. АЛИБОЕВ¹.

SH.R. KHURRAMOV¹, N.U. ANNAEV², SH.I. HURRAMOV³, K.YU. ALIBOEV¹

¹Ташкентский архитектурно-строительный университет, Республика Узбекистан,

²Каршинский инженерно-экономический институт, Республика Узбекистан,

³Ташкентский университет прикладных наук, Республика Узбекистан)

(¹Tashkent University of Architecture and Civil Engineering, Republic of Uzbekistan,

²Karshi Engineering Economics Institute, Republic of Uzbekistan,

³University of Tashkent for Applied Sciences, Republic of Uzbekistan)

E-mail: shavkat-xurramov59@mail.ru

В статье приведены результаты анализа и математического моделирования кривых контакта валков двухвалкового модуля. Получены частные математические модели кривых контакта валков для случаев, когда обрабатываемый материал упругий, упруговязкий и пластичный. Выявлено, что математические модели кривых контакта валков при любых значениях соотношений скоростей деформирования контактирующих тел в зоне контакта имеют одинаковый вид.

The results of the analysis and mathematical modeling of the roll contact curves in a two-roll module are presented in the article. Particular types of mathematical models of roll contact curves are obtained for the cases when the material being processed is absolutely elastic, elastic-viscous, and plastic. It is revealed that the mathematical models of roll contact curves for any values of the ratios of the deformation rates of the contacting bodies in the contact zone have the same appearance.

Ключевые слова: валковые машины, двухвалковый модуль, кривые контакта валков, моделирование кривых контакта валков.

Keywords: roller machines, two-roller module, roll contact curves, modeling of roll contact curves.

Валковые механизмы являются неотъемлемой частью большинства технологического оборудования текстильной и легкой промышленности. Базовым элементом валковых технологических машин является двухвалковый модуль, образуемый парами рабочих валков и обрабатываемым материалом. Любой технологический процесс в валковых машинах осуществляется в их двухвалковом модуле в результате контактного взаимодействия обрабатываемого материала с парами рабочих валков. При этом обращает на себя особое внимание двухвалковый модуль, где валки покрыты эластичными материалами. В таком двухвалковом модуле обрабатываемый материал взаимодействует с покрытиями валков по так называемым кривым контакта валков. По кривым контакта валков передаются силы на обрабатываемый материал, следовательно, по ним распределяются контактные напряжения. Поэтому математические модели кривых контакта валков имеют большое значение при силовом анализе валковых механизмов [1...3].

Явление контактного взаимодействия в валковых механизмах аналогично явлению качения колеса по грунту [4...5]. Вопросу взаимодействия эластичного колеса с деформируемым грунтом посвящено достаточное количество работ [6...9], в которых линии контакта колеса с грунтом изображаются различными линиями, описываются различными формулами, однако область применения этих формул остается невыясненной. Например, в работе [7] форма линии контакта колеса с грунтом отображается уравнениями вида усеченного круга, эллипса и полинома третьей степени, где не указывается область применения ни одного из них.

О взаимодействии контактирующих тел (обрабатываемого материала и эластичного покрытия валка) в двухвалковом модуле судят по направлению изменения их толщины в зоне контакта. Одни авторы считают, что изменение толщины контактирующих тел в каждой точке зоны контакта происходит по направлению, перпендикулярному направлению движения обрабатываемого материала (параллельно оси Oy)

[6...7, 10], а другие – по радиальному направлению к оси валка (по радиусу r) [8, 9, 11].

Исследования показывают, что математическое моделирование явления контактного взаимодействия в двухвалковом модуле неизбежно связано с анализом скоростей деформирования контактирующих тел [4]. Ранее авторы получили уравнения кривых контакта валков, считая соотношение скоростей деформирования контактирующих тел постоянным [12, 13].

Данная работа посвящена анализу влияния соотношения скоростей деформирования контактирующих тел на вид кривых контакта валков.

Анализируем кривые контакта валков симметричного двухвалкового модуля в двух вышеуказанных случаях. При этом рассматриваем явление контактного взаимодействия в верхней части двухвалкового модуля относительно линии симметрии. Сначала считаем, что изменение толщины контактирующих тел в каждой точке зоны контакта происходит параллельно оси Oy . Кривая контакта валка состоит из зоны сжатия и восстановления, разделенной точкой B , лежащей на линии, соединяющей центры валков.

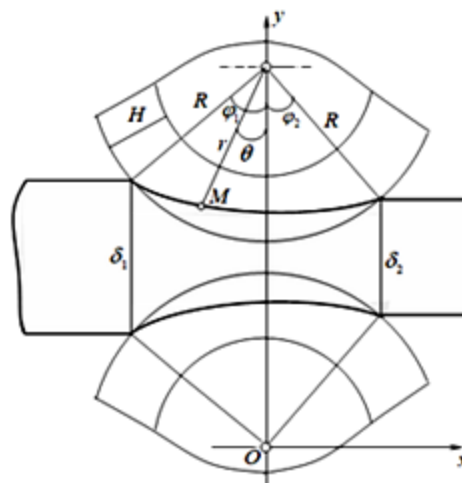


Рис. 1

В зоне сжатия возьмем точку M , определяемую полярными координатами r и θ , при этом $-\varphi_1 \leq \theta \leq 0$, где φ_1 – угол захвата (рис. 1).

Согласно рис. 1 в точке M толщины обрабатываемого материала и покрытия валка изменяются как

$$\begin{aligned} h_{1M} &= r \cos \theta - R \cos \varphi_1, \\ h_{1\phi} &= (R - r) \cos \theta, \end{aligned} \quad (1)$$

где R – радиус валка.

Из равенств (1) имеем

$$\begin{aligned} \frac{dh_M}{dt} &= \frac{d}{dt}(r \cos \theta), \\ \frac{dh_\phi}{dt} &= \frac{d}{dt}((R - r) \cos \theta) \end{aligned}$$

или

$$\begin{aligned} \frac{d\varepsilon_M}{dt} &= \frac{2}{\delta_1} \frac{d}{dt}(r \cos \theta), \\ \frac{d\varepsilon_\phi}{dt} &= \frac{1}{H} \frac{d}{dt}((R - r) \cos \theta), \end{aligned} \quad (2)$$

где δ_1 – толщина обрабатываемого материала; H – толщина покрытия валка; $\frac{d\varepsilon_M}{dt}$, $\frac{d\varepsilon_\phi}{dt}$ – скорости деформирования контактирующих тел валка при сжатии.

Сделаем обозначения:

$$k_1 = \frac{\frac{d\varepsilon_\phi}{dt}}{\frac{d\varepsilon_M}{dt}}. \quad (3)$$

Тогда с учетом выражения (2) получим

$$\frac{1}{H} \frac{d}{dt}((R - r) \cos \theta) = \frac{2}{\delta_1} k_1 \frac{d}{dt}(r \cos \theta),$$

или

$$\frac{d}{d\theta}((R - r) \cos \theta) = \frac{2H}{\delta_1} k_1 \frac{d}{d\theta}(r \cos \theta).$$

Отсюда находим

$$d(r \cos \theta) = -R \frac{1}{1 + m_1 k_1} \sin \theta d\theta, \quad (4)$$

$$\text{где } m_1 = \frac{2H}{\delta_1}.$$

Интегрированием равенства (4) получим

$$r = \frac{1}{\cos \theta} \left(C - R \int \frac{1}{1 + m_1 k_1} \sin \theta d\theta \right), \quad (5)$$

где C – постоянная интегрирования, определяемая по граничному условию:

$$r = R, \text{ когда } \theta_1 = -\varphi_1. \quad (6)$$

Для рассматриваемого валкового модуля $0 \leq k_1 < \infty$.

Рассмотрим предельные случаи взаимодействия контактирующих тел в двухвалковом модуле.

Пусть $k_1 = 0$. В этом случае валок не деформируется, то есть он не имеет эластичного покрытия. Тогда из равенства (5) и условия (6) следует

$$r = R. \quad (7)$$

Пусть $k_1 \rightarrow \infty$. В этом случае обрабатываемый материал не деформируется, то есть его толщина в зоне контакта не меняется.

Тогда из равенства (5) и условия (6) следует

$$r = \frac{R \cos \varphi}{\cos \theta}. \quad (8)$$

В общем случае k_1 является функцией времени, следовательно, угла θ_1 .

В качестве примера считаем $k_1 = \cos \theta_1$.

Тогда из равенства (5) имеем

$$r = \frac{1}{\cos \theta} \left(C - R \int \frac{1}{1 + m_1 \cos \theta} \sin \theta d\theta \right).$$

После интегрирования и определения постоянной интегрирования по условию (6) имеем

$$r = \frac{1}{\cos \theta} \left(\cos \varphi - \frac{R}{m_1} \ln \left(\frac{1 + m_1 \cos \varphi_1}{1 + m_1 \cos \theta} \right) \right)$$

или

$$r = \frac{1}{\cos \theta} \left(\cos \varphi_1 - \frac{R}{m_1} \ln \left(1 - \frac{m_1 (\cos \theta - \cos \varphi_1)}{1 + \cos m_1 \theta} \right) \right).$$

Разложив логарифмическую функцию в ряд и ограничиваясь в первом приближении первым членом разложения, находим

$$r = R \frac{1 + m_1 \cos \varphi_1}{1 + m_1 \cos \theta}. \quad (9)$$

Пусть $k_1 = \text{const}$. Тогда из равенства (5) следует

$$r = \frac{1}{\cos \theta} \left(C + \frac{R}{1 + m_1 k_1} \cos \theta \right).$$

Отсюда с использованием условия (6) находим

$$r = \frac{R}{1 + n_1} \left(1 + n_1 \frac{\cos \varphi_1}{\cos \theta} \right), \quad -\varphi_1 \leq \theta \leq 0, \quad (10)$$

где $n_1 = \frac{2H}{\delta_1} k_1$.

По аналогии с (10) находим для зоны восстановления

$$r = \frac{R}{1 + n_2} \left(1 + n_2 \frac{\cos \varphi_2}{\cos \theta} \right), \quad 0 \leq \theta \leq \varphi_2, \quad (11)$$

где $n_2 = \frac{2H}{\delta_2} k_2$, φ_2 – угол, определяющий конечную точку кривой контакта; δ_2 – толщина обрабатываемого материала при выходе из зоны контакта; k_2 – соотношение скоростей деформирования обрабатываемого материала и покрытия валка при восстановлении.

Формулы (7)...(11) получили, считая, что изменения толщины контактирующих тел в каждой точке зоны контакта происходят параллельно оси Oy .

Теперь считаем, что изменения толщины контактирующих тел в каждой точке зоны контакта происходят по радиусу r (рис. 1). В этом случае в точке M толщины контактирующихся тел изменяются как

$$h_m = r - R \frac{\cos \varphi_1}{\cos \theta}, \quad h_a = R - r.$$

Отсюда имеем

$$\begin{aligned} \frac{d\varepsilon_m}{dt} &= \frac{2}{\delta_1} \frac{d}{dt} \left(r - R \frac{\cos \varphi_1}{\cos \theta} \right), \\ \frac{d\varepsilon_a}{dt} &= \frac{1}{H} \frac{d}{dt} (R - r). \end{aligned} \quad (12)$$

Тогда из равенства (3) с учетом выражения (12) находим

$$\frac{d}{d\theta} (R - r) = \frac{2}{\delta_1} k_1 \frac{d}{d\theta} \left(r - R \frac{\cos \varphi_1}{\cos \theta} \right).$$

Отсюда

$$r = R \cos \varphi_1 \int \frac{m_1 k_1}{1 + m_1 k_1} \frac{\sin \theta}{\cos^2 \theta} d\theta + C, \quad (13)$$

где C – постоянная интегрирования, определяемая по условию (6).

Из интеграла (13) с учетом условия (6) получим уравнения кривых контакта валков двухвалкового модуля в предельных случаях:

– когда валок не имеет эластичного покрытия:

$$r = R; \quad (14)$$

– когда в двухвалковом модуле обрабатываемый материал не деформируется:

$$r = \frac{R \cos \varphi}{\cos \theta}. \quad (15)$$

Когда $k_1 = \cos \theta_1$, из равенства (13) имеем

$$r = R \cos \varphi_1 \int \frac{m_1}{1 + m_1 \cos \theta} \frac{\sin \theta}{\cos \theta} d\theta + C.$$

После интегрирования с учетом условия (6) получим

$$r = R \left(1 - m_1 \cos \varphi_1 \ln \frac{\cos \theta (1 + m_1 \cos \varphi_1)}{\cos \varphi_1 (1 + m_1 \cos \theta)} \right),$$

или

$$r = R \left(1 - m_1 \cos \varphi_1 \ln \left(1 - \frac{\cos \varphi_1 - \cos \theta}{\cos \varphi_1 (1 + m_1 \cos \theta)} \right) \right),$$

или после разложения логарифмической функции в ряд и преобразований

$$r = R \frac{1 + m_1 \cos \varphi_1}{1 + m_1 \cos \theta}. \quad (16)$$

Когда $k_1 = const$, из равенства (13) получим

$$r = \frac{R m_1 k_1 \cos \varphi_1}{1 + m_1 k_1 \cos \theta} + C$$

или с учетом граничного условия (6)

$$r = \frac{R}{1 + n_1} \left(1 + n_1 \frac{\cos \varphi_1}{\cos \theta} \right), \quad -\varphi_1 \leq \theta \leq 0. \quad (17)$$

По аналогии равенства (11) имеем

$$r = \frac{R}{1 + n_2} \left(1 + n_2 \frac{\cos \varphi_2}{\cos \theta} \right), \quad 0 \leq \theta \leq \varphi_2. \quad (18)$$

Формулы (14)...(18) получили, считая, что изменения толщины контактирующих тел в каждой точке зоны контакта происходят по радиусу r . Они совпадают с формулами (7)...(11).

Следовательно, кривые контакта валков описываются одинаковыми формулами при любых значениях соотношений скоростей деформирования контактирующих тел (k_1 и k_2).

Формулы (17) и (18) также совпадают с ранее полученными в работах [12, 13] формулами при $k_1 = const$. Следовательно, можно сказать, что кривые контакта вал-

ков описываются одинаковыми формулами независимо от направления изменения толщины обрабатываемого материала.

Из анализа формул (17), (18) следует, что на модель кривой контакта валков влияют в первую очередь деформационные свойства контактирующих тел. Деформационные свойства обрабатываемого материала следует характеризовать кривой сжатия при взаимодействии с покрытием валка и линией, определяющей восстановление его деформации [10]. Кривая сжатия при этом будет нелинейной [7], следовательно, кривая контакта валков описывается при сжатии по формуле (17). Кривая восстановления зависит от характера материала: он может быть упругим (абсолютно), упруговязким и пластичным [10].

В первом случае $n_2 = n_1$, обрабатываемый материал при выходе из зоны контакта полностью восстановит свою форму и $\varphi_2 = \varphi_1$, поэтому из формулы (18) следует

$$r = \frac{R}{1 + n_1} \left(1 + n_1 \frac{\cos \varphi_1}{\cos \theta} \right), \quad 0 \leq \theta \leq \varphi_1. \quad (19)$$

Во втором случае $n_2 \neq n_1$, обрабатываемый материал при выходе из зоны контакта частично восстановит свою форму и $\varphi_2 \neq \varphi_1$, следовательно, для определения r_2 используем формулу (18).

В третьем случае $n_2 \rightarrow \infty$, обратной деформации обрабатываемого материала не будет, значит, из формулы (18) следует

$$r = \frac{R \cos \varphi_2}{\cos \theta}, \quad 0 \leq \theta \leq \varphi_2. \quad (20)$$

Таким образом, кривая контакта валков состоит из двух частей: первая из кривой, описываемой формулой (17), а вторая из кривой, описываемой по одной из формул (18), (19) и (20). При этом все графики кривых лежат между графиками кривых

$$r = \frac{R \cos \varphi}{\cos \theta} \text{ и } r = R.$$

ВЫВОДЫ

1. Установлено, что математические модели кривых контакта валков при любых значениях соотношений скоростей деформирования контактирующих тел в зоне контакта имеют одинаковый вид.

2. Выявлено, что математические модели кривых контакта валков не зависят от направления изменения толщины обрабатываемого материала.

3. Получены частные математические модели кривых контакта валков для случаев, когда обрабатываемый материал упругий, упруговязкий и пластичный.

ЛИТЕРАТУРА

1. Демидов А.В. Разработка и исследование валкового устройства для повышения эффективности отжима шерсти после промывки: дис. канд. техн. наук. Иваново, 2004. 219 с.

2. Фомин Ю.Г., Ларионов С.В., Ларионова М.Д. Основы теории, конструкции и расчет валковых машин. Иваново, 1999. Ч. 1. 271 с.

3. Тургунов К.К. Исследование контактного взаимодействия в валковых парах кожевенных машин для повышения качества продукции и эффективности производства: дис. ... д-ра филос. (PhD). Ташкент, 2023. 120 с.

4. Хуррамов Ш.Р. Аналитическое описание формы кривых контакта валков в двухвалковом модуле // Изв. вузов. Технология текстильной промышленности. 2021. №4 (394). С. 153...158.

5. Кузнецов Г.К. Исследование и методика проектирования валковых отжимных устройств текстильных машин: дис. ... д-ра техн. наук. Кострома, 1970. 287 с.

6. Ким Ю.А., Бобрович В.А., Войтеховский Б.В., Исаченков В.С. Влияние величины давления в шинах колес на геометрические параметры пятна контакта при взаимодействии с опорной поверхностью // Труды Белорусского ГТУ. 2018. №32. С. 308...312.

7. Соловьев В.И., Шухман С.Б., Капралова М.А. Форма контакта эластичного колеса с деформируемым грунтом и расчет глубины колеи // Известия МГТУ «МАМИ». 2012. Т.1, №2(14). С. 348...355.

8. Хайлис Г.А. Определение глубины колеи и силы сопротивления перекачиванию по почве свободного пневматического колеса // Достижения науки и техники АПК. 2006. №4. С. 10...14.

9. Пелевин Л.Е., Абрашкевич Ю.Д., Балака М.Н., Аржаев Г.А. Моделирование процесса взаимодействия эластичного колеса с деформируемой опорной поверхностью // Горное оборудование и электромеханика. 2013. №7. С. 10...16.

10. Кузнецов Г.К., Фарушкин В.В., Красовская М.С. Распределение давления по дуге контакта валков как функция свойств прокатываемого мате-

риала // Изв. вузов. Технология текстильной промышленности. 2007. №2 (297). С. 87...89.

11. Khurramov Sh.R. Filtration rates in roller pressing of fibrous materials. AIP Conf. Proceedings 2402 030042 (2021). – <https://doi.org/10.1063/5/0071266>.

12. Хуррамов Ш.Р. К вопросам моделирования кривых контакта валков // Динамика систем механизмов и машин. 2020. Т. 8, №1. С. 110...116.

13. Khurramov Sh.R. and Kurbanova F.Z. Distribution of contact volgates in asymmetric two-roll module. IOP Conf Series. Earth and Environmental Science. 614(2020) 0120982. – doi: 10.1088/1755-1315/614/ 022098.

REFERENCES

1. Demidov A.V. Razrabotka i issledovaniye valkovogo ustroystva dlya povsheniya effektivnosti otjima shersti posle promivki: dis. kand. texn. nauk. Ivanovo, 2004, 219 s.

2. Fomin Yu.G., Larionov S.V., Larionova M.D. Osnovi teorii, konstruksii i raschet valkovix mashin. Ivanovo, 1999. Ch.1. 271 s.

3. Turgunov K.K. Issledovaniye kontaktnogo vzaimodeystviya v valkovix parax kojevennix mashin dlya povsheniya kachestva produkcii i effektivnosti proizvodstva: dis. ... d-ra filoz. (PhD). Tashkent, 2023. 120 s.

4. Khurramov Sh.R. Analytical description of the contact curve shape of the rolls in the two-roller module // Izvestiya Vysshikh Uchebnykh Zavedenii, Seriya Tekhnologiya Tekstil'noi Promyshlennosti. 2021. 4 (394). P. 153...158.

5. Kuznetsov G.K. Issledovanie i metodika proektirovaniya valkovix otjimmix ustroystv tekstil'nix mashin: dis. ... d-ra texn. nauk. Kostroma, 1970. 287 p.

6. Kim Yu.A., Bobrovich V.A., Voytexovskiy B.V., Isachenkov V.S. Vliyaniye velichini davleniya v shinax koles na geometricheskie parametri pyatna kontakta pri vzaimodeystvii s opornoй poverkhnost'yu // Trudi Belorusskogo GTU. 2018. №32. S. 308...312.

7. Solov'ev V.I., Shuxman S.B., Kapralova M.A. Forma kontakta elastichnogo kolesa s deformiruемim runtom i raschet glubini kolei // Izvestiya MGTU «МАМИ». 2012. Т. 1, №2(14). С. 348...355.

8. Haylis G.A. Opredeleniye glubini kolei i sili soprotivleniya perekativaniyu po pochve svobodnogo pnevmaticheskogo kolesa // Dostizheniya nauki i tekhniki APK. 2006. №4. S. 10...14.

9. Pelevin L.E., Abrashkevich Yu.D., Balaka M.N., Arjaev G.A. Modelirovaniye protsessа vzaimodeystviya elastichnogo kolesa s deformiruемой opornoй poverkhnost'yu // Gornoe oborudovaniye i elektromekhanika. 2013. №7. S. 10...16.

10. Kuznetsov G.K., Farukshin V.V., Krasovskaya M.S. Raspredeleniye davleniya po duge kontakta valkov kak funktsiya svoystv prokativaемого materiala // Izvestiya Vysshikh Uchebnykh Zavedenii, Seriya Tekhnologiya Tekstil'noi Promyshlennosti. 2007. №2 (297). S. 87...89.

11. *Khurramov Sh.R.* Filtration rates in roller pressing of fibrous materials. AIP Conf. Proceedings 2402 030042 (2021). – <https://doi.org/10.1063/5/0071266>.

12. *Xurramov Sh.R.* K voprosam modelirovaniya krivix kontakta valkov // *Dinamika sistem mekhanizmov i mashin.* 2020. Vol. 8, №1, S. 110...116.

13. *Khurramov Sh.R. and Kurbanova F.Z.* Distribution of contact volgates in asymmetric two-roll mod-

ule. IOP Conf Series. Earth and Environmental Science. 614(2020) 0120982. – doi: 10.1088/1755-1315/614/ 022098.

Рекомендована кафедрой цифровых технологий Ташкентского архитектурно-строительного университета. Поступила 22.04.24.
