УДК 677.017
DOI 10.47367/0021-3497_2025_2_341

ОПРЕДЕЛЕНИЕ ПРОСТРАНСТВЕННЫХ КООРДИНАТ ОСЕВЫХ ЛИНИЙ ИЗГИБА НИТЕЙ В ТКАНИ ПОЛОТНЯНОГО ПЕРЕПЛЕТЕНИЯ НА ОСНОВЕ НЕЛИНЕЙНОЙ ТЕОРИИ ИЗГИБА УПРУГИХ СТЕРЖНЕЙ

DETERMINATION OF THE SPATIAL COORDINATES OF THE AXIAL BENDING LINES OF THREADS IN A PLAIN WEAVE FABRIC BASED ON THE NON-LINEAR THEORY OF BENDING ELASTIC RODS

Т.Ю. КАРЕВА[1], Л.В. КОЖЕВНИКОВА[1], С.О. КОЖЕВНИКОВ[2], Е.А. ВАРГАНОВА[1], Д.А. МИРОШНИЧЕНКО[1]

T.YU. KAREVA[1], L.V. KOZHEVNIKOVA[1], S.O. KOZHEVNIKOV[2], E.A. VARGANOVA[1], D.A. MIROSHNICHENKO[1]

([1]Ивановский государственный политехнический университет, [2]Ивановский государственный энергетический университет им. Ленина)

([1]Ivanovo State Polytechnic University, [2]Ivanovo State Power Engineering University)

E-mail: ktju@bk.ru

Приведена методика определения параметров осевых линий изгиба нитей на основе нелинейной теории изгиба упругих стержней, параметров строения и пространственных координат нитей в ткани полотняного переплетения для построения ее компьютерной модели с учетом технологических плотностей и жесткостных характеристик используемых нитей. Представлены системы математических выражений, обеспечивающие определение пространственных координат осевых линий изгиба нитей в ткани полотняного переплетения, с унифицированными формулами, учитывающими наличие в точке контакта на поверхности полотна основного или уточного перекрытия.

The article presents a method for determining the parameters of the axial bending lines of threads based on the nonlinear theory of elastic rod bending, determining the parameters of the structure and spatial coordinates of threads in plain fabric for constructing its computer model taking into account the technological densities and rigidity characteristics of the threads used. The article presents systems of mathematical expressions that ensure the determination of the spatial coordinates of the axial bending lines of threads in plain weave fabric with unified formulas that take into account the presence of a main or weft overlap at the point of contact on the surface of the fabric.

Ключевые слова: компьютерная модель, пространственные координаты осевой линии изгиба нитей, полотняное переплетение, параметры строения однослойной ткани, нелинейная теория изгиба.

Keywords: computer model, spatial coordinates of the axial line of thread bending, plain weave, structure parameters of single-layer fabric, nonlinear theory of bending.

Для построения компьютерной модели ткани, наиболее точно отражающей взаимное расположение нитей в тканом полотне с учетом жесткости используемых нитей на изгиб, необходимо знать координаты точек взаимодействия нитей в зависимости от линейных плотностей нитей в ткани, величины их смятия, плотности расположения в полотне и высот волн изгиба, определенных по линейной или нелинейной теории изгиба [1]. Решение задачи определения высот волн изгиба нитей при использовании нелинейной теории изгиба дает более близкие к действительности значения, но является более сложной по сравнению с использованием линейной теории изгиба. При этом достоверность применения нелинейной теории изгиба упругих стержней для определения параметров строения текстильных материалов доказана исследованиями многих ученых-текстильщиков. Так, в [2…5] приводятся системы уравнений для расчета параметров строения ткани, определения жесткости нити при изгибе с использованием нелинейной теории изгиба упругих стержней на основе схемы изгиба консольно закрепленной нити.

В [5] представлена методика расчета формы нити в ткани полотняного переплетения на основе нелинейной теории изгиба упругих стержней применительно к нити основы, в которой не рассматривается пространственная ячейка и расчеты ведутся отдельно для систем нитей основы и утка, тем самым не учитывается равновесие взаимодействующих нитей и не рассчитываются пространственные координаты осевых линий изгиба нитей.

В работе [6] решается задача определения параметров осевой линии изгиба нитей в ткани с использованием метода упругих параметров нелинейной теории изгиба упругих стержней. Представленная методика позволяет определять модулярный угол, высоты волн изгиба нитей основы и утка, геометрические плотности ткани, длины зарабатываемых нитей в ткань, а также силы нормального давления нитей друг на друга в зоне контакта на основе заправочных данных и известных значений уработок нитей, что является неприемлемым при моделировании строения однослойной ткани при заданных плотностях и жесткостных характеристиках нитей.

Методы расчета строения ткани, основанные на балансе изгиба нитей, хорошо известны и применялись многими учеными при прогнозировании строения и компьютерном моделировании тканых полотен [7, 8], при этом не только для однослойных, но и для многослойных тканей [9, 10].

Целью данного исследования является разработка методики определения пространственных координат осевых линий изгиба нитей основы и утка согласно нелинейной теории изгиба упругих стержней для возможности построения компьютерной модели ткани полотняного переплетения, наиболее точно отражающей взаимное расположение в ней нитей.

Как известно, структура ткани на ткацком станке постоянно меняется по мере отвода ее из зоны формирования, но окончательное свое строение она приобретает после снятия со станка, то есть в свободном состоянии без растягивающих усилий как вдоль основы, так и вдоль утка. При этом определяющими факторами, оказывающими наибольшее влияние на организацию структуры полотна, являются жесткостные характеристики нитей и их плотность расположения в ткани. Ввиду малости перемещения при растяжении по сравнению с перемещениями при изгибе от сил взаимного

давления нитей друг на друга длину осевой линии изгиба нитей будем считать неизменной в процессе изгиба, то есть в первом приближении считаем работу нитей в пределах упругости без учета вязкоупругих и пластических деформаций.

Для решения поставленной цели рассмотрим геометрию строения ячейки ткани полотняного переплетения. На рис. 1, а представлена схема разреза ткани вдоль первой нити утка. Как известно, по линии контакта нитей основы и утка со стороны первой нити основы действует (приложена) распределенная силовая нагрузка q_{1o}, со стороны второй нити основы – распределенная силовая нагрузка q_{3o} с переменными углами наклона к линии контакта. Уравнение равновесия осевой линии изгиба первой нити утка при этом будет содержать функцию дуговой координаты s_k (по линии контакта) и может быть решено только численным методом. В связи с вышеуказанным и принимая во внимание неизбежность решения системы уравнений с множеством неизвестных переменных, учитывающих пространственное расположение точек контакта нитей в ячейке полотняного переплетения, заменим в первом приближении распределенную нагрузку q_{1o}, действующую со стороны первой нити основы на первую нить утка в зоне их контакта, на равнодействующую N_{1o}, распределенную нагрузку q_{3o}, действующую со стороны второй нити основы на первую нить утка в зоне их контакта, на равнодействующую N_{3o}. Также поступим и в зонах контакта второй нити утка и первой нити основы и второй нити утка и второй нити основы. Применим для решения поставленной цели дифференциальные уравнения равновесия осевой линии изгиба нитей, приведенные к интегралам Лежандра, используя подход, рассмотренный в [11].

Для полотняного переплетения ткани, снятой со станка, и любого переплетения главного класса в зоне первой точки контакта нитей основы и утка (точка 1 на рис. 1, б, в), в осях, ориентированных по направлению приложенной силы, угол наклона ζ_{T0} касательной к осевой линии изгиба нити утка (рис. 1, б) или нити основы (рис. 1, в) в начальной точке осевой линии T0 равен $\zeta_{T0} = 90^o$ [6].

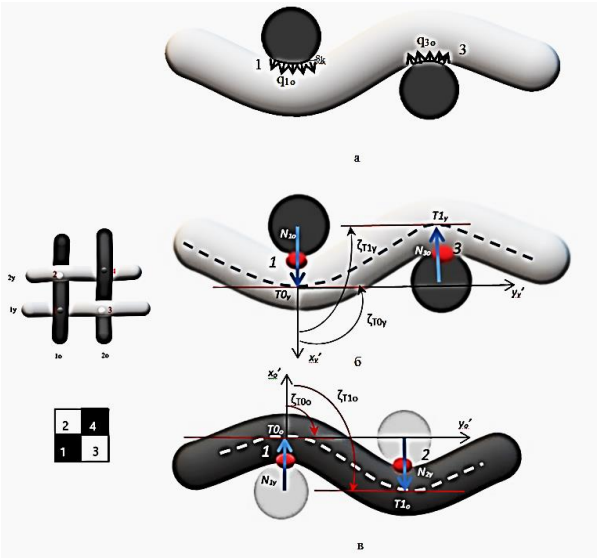


Рис. 1

Тогда в соответствии с [11] для форм перегибного вида, к которым относится осевая линия изгиба любой нити основы и утка в зоне пересечки, будет справедливо выражение:

$$sin(\zeta/2) = ksin(\psi), \qquad (1)$$

где k – модуль эллиптического интеграла Лежандра; ψ – амплитуда эллиптического интеграла Лежандра.

Для начальной точки изгиба T0 согласно рис. 1 и выражению (1) будем иметь:

для осевой линии основы (рис. 1, в)

$$k_o sin(\psi_{T0o}) = 0{,}707, \qquad (2)$$

для осевой линии утка (рис. 1, б)

$$k_y sin(\psi_{T0y}) = 0{,}707, \qquad (3)$$

где ko, ky – модуль эллиптического интеграла Лежандра для осевой линии изгиба нити основы и утка соответственно; ψ_{T0o}, ψ_{T0y} – амплитуда эллиптического интеграла Лежандра для начальной точки осевой линии изгиба нити основы и утка соответственно.

Одновременно (рис. 1) в точках Tl_o и Tl_y угол наклона ζ_{Tl} касательной к осевой линии изгиба нити утка (рис. 1, б) или нити основы (рис. 1, в) в конечной точке осевой линии Т1 также равен ζ_{Tl}=90°, следовательно, $k_o \cdot sin(\psi_{T1o}) = 0{,}707$, $k_y \cdot sin(\psi_{T1y}) = 0{,}707$, что возможно при условии:

$$\psi_{T1o} = \pi - \psi_{T0o}, \quad (4)$$

$$\psi_{T1y} = \pi - \psi_{T0y}, \quad (5)$$

где ψ_{T1o}, ψ_{T1y} – амплитуда эллиптического интеграла Лежандра для конечной точки осевой линии изгиба нити основы и утка соответственно.

Известно [11], что уравнение упругой линии перегибного рода в осях, ориентированных по направлению силы, имеет вид:

$$\frac{x' - x'_0}{l} = \frac{2}{\beta}[E(\psi) - E(\psi_0)] - \frac{s}{l}, \quad (6)$$

$$\frac{y' - y'_0}{l} = \frac{2}{\beta}k(\cos\psi_0 - \cos\psi), \quad (7)$$

где x', y' – координата произвольной точки упругой линии в осях, ориентированных по направлению силы; x'_0, y'_0 – координата начальной точки упругой линии в осях, ориентированных по направлению силы; l – полная длина упругой линии; ψ_0 – амплитуда эллиптического интеграла Лежандра для начальной точки осевой линии; ψ – амплитуда эллиптического интеграла Лежандра для произвольной точки осевой линии; s – длина дуги упругой линии в произвольной точке, отсчитываемая от ее начала; β – постоянная для данной упругой линии:

$$\beta^2 = \frac{Pl^2}{H}, \quad (8)$$

P – приложенная к упругой линии сила; Н – изгибная жесткость поперечного сечения; $E(\psi)$ – эллиптический интеграл Лежандра второго рода:

$$E(\psi) = \int_0^{\psi} \sqrt{1 - k^2 sin^2\psi}\, d\psi, \quad (9)$$

$$E(\psi_0) = \int_0^{\psi_0} \sqrt{1 - k^2 sin^2\psi_0}\, d\psi. \quad (10)$$

Задача состоит в определении неизвестных переменных $k\psi\psi_0 Pl$ уравнений (6) и (7), что позволит рассчитать координату любой точки упругой линии, принимая во внимание, что жесткость нам известна.

В нашем случае в осях, ориентированных по направлению силы, согласно рис. 1 координата x'_y будет соответствовать расстоянию по вертикали от начальной точки изгиба уточной нити до произвольной точки на ее оси, x'_o – расстоянию по вертикали от начальной точки изгиба основной нити до произвольной точки на ее оси, координата y'_y будет соответствовать расстоянию по горизонтали от начальной точки изгиба уточной нити до произвольной точки на ее оси, y'_o – расстоянию по горизонтали от начальной точки изгиба основной нити до произвольной точки на ее оси. Причем в конечной точке осевой линии изгиба, т. е. в точке $T1_o$ для основы и $T1_y$ для утка (рис. 1), эти координаты будут соответствовать:

$$|x'_{T1o}| = h_o, \quad |x'_{T1y}| = h_y, \quad (11)$$

$$y'_{T1o} = 100/P_y, \quad y'_{T1y} = 100/P_o, \quad (12)$$

где h_o, h_y – высоты волн изгиба нитей основы и утка соответственно, мм; P_o, P_y – плотности ткани по основе и утку соответственно, нит/дм.

Значение координаты точки осевой линии изгиба в уравнении (11) принимается по абсолютной величине в связи с тем, что высота волны изгиба нити всегда величина положительная, а координата осевой линии и нити основы, и нити утка ввиду ориентации осей по направлению приложенной силы всегда будет величиной отрицательной.

Поскольку начало координат осей, ориентированных по направлению силы, совпадает с начальной точкой осевой линии изгиба нитей основы и утка (рис. 1), то уравнения (6) и (7) применительно к осевым линиям изгиба нитей основы и утка и с учетом (4) и (5) примут следующий вид для определения координат конечной точки изгиба осевых линий нитей основы и утка:

$$\frac{x'_{T1o}}{l_o} = \frac{2}{\beta_o}[E(\psi_{T0o}) - E(\psi_{T1o})] - 1, \quad (13)$$

$$\frac{x'_{\text{T1y}}}{l_{\text{y}}} = \frac{2}{\beta_{\text{y}}}\left[E\left(\psi_{\text{T0y}}\right) - E\left(\psi_{\text{T1y}}\right)\right] - 1, \quad (14)$$

$$\frac{y'_{\text{T1o}}}{l_{\text{o}}} = \frac{2}{\beta_{o}} k_{\text{o}}\left(\cos\psi_{\text{T0o}} - \cos\psi_{\text{T1o}}\right), \quad (15)$$

$$\frac{y'_{\text{T1y}}}{l_{\text{y}}} = \frac{2}{\beta_{\text{y}}} k_{\text{y}}\left(\cos\psi_{\text{T0y}} - \cos\psi_{\text{T1y}}\right), \quad (16)$$

где l_o,l_y – полная длина осевой линии изгиба от начальной до конечной точки нити основы, утка соответственно, мм; β_o – постоянная для осевой линии изгиба основной нити; β_{y} – постоянная для осевой линии изгиба уточной нити.

С учетом принятых на рис. 1 обозначений выражение (8) примет следующий вид для осевых линий изгиба нитей основы и утка:

$$\beta_o^2 = \frac{N_{1y} l_o^2}{\text{H}_o} \rightarrow \beta_o = l_o\sqrt{\frac{N_{1y}}{\text{H}_o}}, \quad (17)$$

$$\beta_{\text{y}}^2 = \frac{N_{1\text{o}} l_{\text{y}}^2}{\text{H}_{\text{y}}} \rightarrow \beta_{\text{y}} = l_{\text{y}}\sqrt{\frac{N_{1\text{o}}}{\text{H}_{\text{y}}}}, \quad (18)$$

где H_{o} – изгибная жесткость нити основы; H_{y} – изгибная жесткость нити утка; $N_{1\text{o}}$,$N_{1\text{y}}$ – сила давления нити основы на нить утка, нити утка на нить основы в точке контакта (рис. 1, т. 1).

Тогда выражения (15) и (16) с учетом (12), (17), (18) и третьего закона Ньютона $N_{1\text{o}} = N_{1\text{y}} = N$ [1] будут иметь следующий вид:

$$\frac{100/P_y}{l_{\text{o}}} = \frac{2}{l_o\sqrt{\frac{N}{\text{H}_o}}} k_{\text{o}}\left(\cos\psi_{\text{T0o}} - \cos\psi_{\text{T1o}}\right), \quad (19)$$

$$\frac{100/P_o}{l_{\text{y}}} = \frac{2}{l_{\text{y}}\sqrt{\frac{N}{\text{H}_{\text{y}}}}} k_{\text{y}}\left(\cos\psi_{\text{T0y}} - \cos\psi_{\text{T1y}}\right). \quad (20)$$

Выразим из уравнений (2) и (3) с учетом основного тригонометрического тождества $(\cos^2\psi + sin^2\psi = 1)$ и выражений (4) и (5) величины $\cos\psi_{\text{T0y}}\cos\psi_{\text{T0o}}$, $\cos\psi_{\text{T1y}}\cos\psi_{\text{T1o}}$:

$$cos(\psi_{\text{T0o}}) = \sqrt{1 - (0{,}707/k_{\text{o}})^2}, \quad (21)$$

$$cos(\psi_{\text{T0y}}) = \sqrt{1 - (0{,}707/k_{y})^2}, \quad (22)$$

$$cos(\psi_{\text{T1o}}) = cos(\pi - \psi_{\text{T0o}}) = \\ = -\sqrt{1 - (0{,}707/k_{\text{o}})^2}, \quad (23)$$

$$cos(\psi_{\text{T1y}}) = cos(\pi - \psi_{\text{T0y}}) = \\ = -\sqrt{1 - (0{,}707/k_{y})^2}. \quad (24)$$

Подставим (21), (23) в (19) и (22), (24) в (20), сократим длины l_{y} и l_{o}, возведем полученные выражения в квадрат, получим следующие зависимости:

$$(100/P_y)^2 = \frac{16\text{H}_o}{N}\left(k_{\text{o}}{}^2 - 0{,}5\right), \quad (25)$$

$$(100/P_{\text{o}})^2 = \frac{16\text{H}_{\text{y}}}{N}\left(k_{\text{y}}{}^2 - 0{,}5\right). \quad (26)$$

Преобразуем формулы (13) и (14) с учетом выражений (4), (5), (6), (7), (9), (10):

$$x'_{\text{T1o}} = \frac{2}{\sqrt{\frac{N}{\text{H}_o}}}\left[\int_0^{\pi-\psi_{\text{T0o}}}\sqrt{1 - k_o^2 sin^2\psi}\,d\psi - \int_0^{\psi_{\text{T0o}}}\sqrt{1 - k_o^2 sin^2\psi}\,d\psi\right] - l_{\text{o}}, \quad (27)$$

$$x'_{\text{T1y}} = \frac{2}{\sqrt{\frac{N}{\text{H}_y}}}\left[\int_0^{\pi-\psi_{\text{T0y}}}\sqrt{1 - k_y^2 sin^2\psi}\,d\psi - \int_0^{\psi_{\text{T0y}}}\sqrt{1 - k_y^2 sin^2\psi}\,d\psi\right] - l_y. \quad (28)$$

Согласно [11] постоянная упругой линии β:

$$\beta = F(\psi) - F(\psi_0) = \int_0^{\psi}\frac{d\psi}{\sqrt{1-k^2 sin^2\psi}} - \int_0^{\psi_0}\frac{d\psi}{\sqrt{1-k^2 sin^2\psi_0}}, \quad (29)$$

где $F(\psi), F(\psi_0)$ – эллиптический интеграл Лежандра первого рода для произвольной точки и начальной точки упругой линии соответственно.

В нашем случае выражение (29) для постоянных β_o и β_{y} примет следующий вид:

$$\beta_{\text{o}} = F(\psi_{\text{T1o}}) - F(\psi_{\text{T0o}}) = \int_0^{\pi-\psi_{\text{T0o}}}\frac{d\psi}{\sqrt{1-k_o^2 sin^2\psi}} - \int_0^{\psi_{\text{T0o}}}\frac{d\psi}{\sqrt{1-k_o^2 sin^2\psi}}, \quad (30)$$

$$\beta_{\text{y}} = F\left(\psi_{\text{T1y}}\right) - F\left(\psi_{\text{T0y}}\right) = \int_0^{\pi-\psi_{\text{T0y}}}\frac{d\psi}{\sqrt{1-k_{\text{y}}^2 sin^2\psi}} - \int_0^{\psi_{\text{T0y}}}\frac{d\psi}{\sqrt{1-k_{\text{y}}^2 sin^2\psi}}. \quad (31)$$

Приравняем выражения (17) и (30), а также (18) и (31) и выразим из них l_o и l_y:

$$l_o = \frac{\int_0^{\pi-\psi_{T0o}} \frac{d\psi}{\sqrt{1-k_o^2 sin^2\psi}} - \int_0^{\psi_{T0o}} \frac{d\psi}{\sqrt{1-k_o^2 sin^2\psi}}}{\sqrt{\frac{N}{H_o}}}, \quad (32)$$

$$l_y = \frac{\int_0^{\pi-\psi_{T0y}} \frac{d\psi}{\sqrt{1-k_y^2 sin^2\psi}} - \int_0^{\psi_{T0y}} \frac{d\psi}{\sqrt{1-k_y^2 sin^2\psi}}}{\sqrt{\frac{N}{H_y}}}. \quad (33)$$

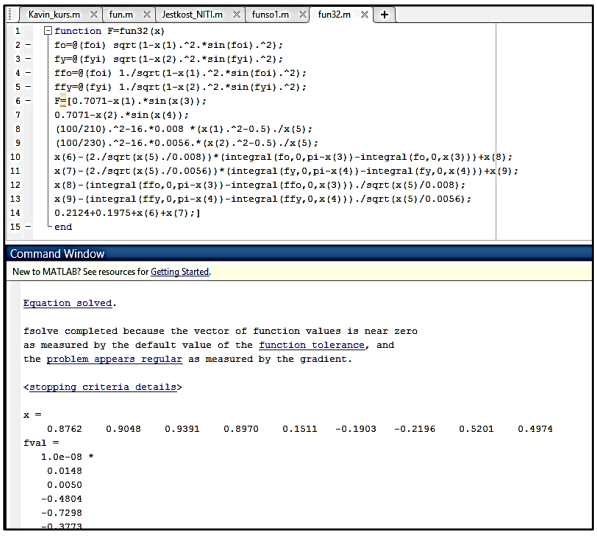
Составим систему нелинейных уравнений для определения параметров осевых линий изгиба нитей, входящих в уравнения (27) и (28), учтем при этом основное правило проф. Новикова Н.Г.

$$\begin{cases} k_o sin(\psi_{T0o}) = 0{,}707 \\ k_y sin(\psi_{T0y}) = 0{,}707, \\ (100/P_y)^2 = \frac{16H_o}{N}\left(k_o{}^2 - 0{,}5\right) \\ (100/P_o)^2 = \frac{16H_y}{N}\left(k_y{}^2 - 0{,}5\right) \\ x'_{T1o} = \frac{2}{\sqrt{\frac{N}{H_o}}}\left[\int_0^{\pi-\psi_{T0o}} \sqrt{1-k_o^2 sin^2\psi}\,d\psi - \int_0^{\psi_{T0o}} \sqrt{1-k_o^2 sin^2\psi}\,d\psi\right] - l_o \\ x'_{T1y} = \frac{2}{\sqrt{\frac{N}{H_y}}}\left[\int_0^{\pi-\psi_{T0y}} \sqrt{1-k_y^2 sin^2\psi}\,d\psi - \int_0^{\psi_{T0y}} \sqrt{1-k_y^2 sin^2\psi}\,d\psi\right] - l_y \\ l_o = \frac{\int_0^{\pi-\psi_{T0o}} \frac{d\psi}{\sqrt{1-k_o^2 sin^2\psi}} - \int_0^{\psi_{T0o}} \frac{d\psi}{\sqrt{1-k_o^2 sin^2\psi}}}{\sqrt{\frac{N}{H_o}}} \\ l_y = \frac{\int_0^{\pi-\psi_{T0y}} \frac{d\psi}{\sqrt{1-k_y^2 sin^2\psi}} - \int_0^{\psi_{T0y}} \frac{d\psi}{\sqrt{1-k_y^2 sin^2\psi}}}{\sqrt{\frac{N}{H_y}}} \\ d_o + d_y = -(x'_{T1o} + x'_{T1y}) \end{cases} \quad (34)$$

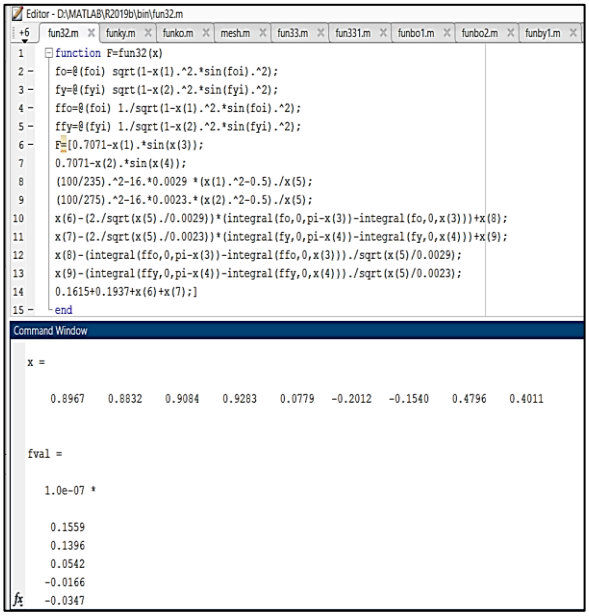
В качестве исходных данных для решения системы (34) принимаем плотности ткани по основе P_o и утку P_y, а также жесткости на изгиб нитей основы H_o и утка H_y.

Современные компьютерные системы математических вычислений позволяют решить системы уравнений любой сложности. Нами использована функция *fsolve* системы Matlab. Для решения системы уравнений функцией *fsolve* параметры осевых линий $k_o, k_y, \psi_{T0o}, \psi_{T0y}, N, x'_{T1o}, x'_{T1y}, l_o, l_y$ переведены в x(1), x(2), x(3), x(4), x(5), x(6), x(7), x(8), x(9) соответственно. На рис. 2 представлен скриншот решения системы (34) с использованием функции Matlab для определения параметров осевых линий изгиба нитей основы и утка в тканях полотняного переплетения образцов №1 (рис. 2, а) и №2 (рис. 2, б), определение координат точек контакта в которых для построения компьютерной модели было рассмотрено нами в [1].

В качестве исходных данных приняты следующие значения заправочных параметров [1]: образец № 1: T_o=32 текс, T_y=26 текс, P_o=230 нит./дм, P_y=210 нит./дм, d_o=0,2124 мм, d_y=0,1975 мм; образец № 2: T_o=18,5 текс, T_y=25 текс, P_o=275 нит./дм, P_y=235 нит./дм, d_o=0,1615 мм, d_y=0,2 мм.



а)



б)

Рис. 2

Жесткость нитей на изгиб определена экспериментально и составила [1]:

для образца №1 – нити основы $H_o = 0{,}008$ Н·мм^2, нити утка H_y=0,0056 Н·мм^2;

для образца №2 – нити основы $H_o = 0{,}0029$ Н·мм^2, нити утка H_y=0,0023 Н·мм^2.

В результате решения системы (34) получены следующие значения параметров осевых линий изгиба основы и утка:

для образца ткани полотняного переплетения №1: k_0=0,8762, k_y=0,9048, ψ_{TOo}=0,9391 рад, ψ_{TOy}=0,8970 рад, N=0,1511 Н, $x`_{T1o}$=–0,1903 мм, $x`_{T1y}$=-0,2196 мм, lo=0,5201 мм, ly=0,4974 мм,

для образца ткани полотняного переплетения №2: k_0=0,8967, k_y=0,8832, ψ_{TOo}=0,9084 рад, ψ_{TOy}=0,9283 рад, N=0,0779 Н, $x`_{T1o}$=–0,2012 мм, $x`_{T1y}$=-0,1540 мм, lo=0,4796 мм, ly=0,4011 мм,

С учетом уравнения (11) высоты волн изгиба нитей основы и утка будут составлять:

образец №1: h_o=0,1903 мм, h_y=0,2196 мм;

образец №2: h_o=0,2012 мм, h_y=0,154 мм.

Подставив значения высот волн изгиба в систему (3) [1], получим координаты точек контакта нитей в исследуемых тканях (образец №1 и образец №2) полотняного переплетения в случае использования нелинейной теории изгиба. В табл. 1 и 2 представлены результаты расчетов координат точек и высот волн изгиба нитей основы и утка для ткани полотняного переплетения образцов №1 и №2 соответственно, полученные при использовании линейной [1] и нелинейной теории изгиба нитей.

Таблица 1

Исходные данные	Линейная плотность пряжи (нити), текс		Коэффициент рода волокна		Плотность ткани, нит./дм.		Средние значения жесткости нитей на изгиб, Н·мм^2, определенные экспериментально		Коэффициенты смятия поперечного сечения нити в ткани		Средние значения высот волн изгиба нитей, определенные по фотографиям разрезов,мм		Средние экспериментально определенные значения уработок нитей у ткани, %	
	основа	уток	основа	уток	по основе	по утку	основа	уток	основа	уток	основа	уток	основа	уток
Образец №1	To	Ty	Co	Cy	Po	Py	Ho	Hy	το	τy	$h_{oэксп}$	$h_{yэксп}$	a_o	a_y
	32	26	1,25	1,25	230	210	0,008	0,0056	0,95	0,98	0,206	0,214	8,07	9,57
	Результаты вычислений при использовании линейной теории изгиба													
	Диаметр нити, мм		Координаты точек контакта в направлении оси z, мм				Высоты волн изгиба нитей в ткани , мм.				Сила нормального давления нитей основы и утка в точке контакта, Н		Относительное отклонение расчетных значений высот волн изгиба нитей от экспериментальных, %	
	основа	уток	первая точка	вторая точка	третья точка	четвертая точка	основа	уток	основа	уток				
	d_o	d_y	h_1	h_2	h_3	h_4	h_{12}	$h_{13}=h_y$	$h_{34}=h_o$	$h_{24}=h_y$	N_{1o}		основа	уток
	0,2124	0,1975	0,0000	0,0160	0,0160	0,0000	0,1964	0,2135	0,1964	0,2135	0,1746		4,67	0,22
	Результаты вычислений при использовании нелинейной теории изгиба													
	Длина нити в раппорте, мм		Координаты точек контакта в направлении оси z, мм				Высоты волн изгиба нитей в ткани , мм.				Сила нормального давления нитей основы и утка в точке контакта, Н		Относительное отклонение расчетных значений высот волн изгиба нитей от экспериментальных, %	
	основа	уток	первая точка	вторая точка	третья точка	четвертая точка	основа	уток	основа	уток				
	l_o	l_y	h_1	h_2	h_3	h_4	h_{12}	$h_{13}=h_y$	$h_{34}=h_o$	$h_{24}=h_y$	N_{1o}		основа	уток
	0,5201	0,4974	0,0000	0,0221	0,0221	0,0000	0,1903	0,2196	0,1903	0,2196	0,1511		7,62	-2,62

Таблица 2

Исходные данные	Линейная плотность пряжи (нити), текс		Коэффициент рода волокна		Плотность ткани, нит./дм.		Средние значения жесткости нитей на изгиб, Н·мм², определенные экспериментально		Коэффициенты сжатия поперечного сечения нити в ткани		Средние значения высот волн изгиба нитей, определенные по фотографиям разрезов, мм		Средние экспериментально определенные значения уработок нитей у ткани, %	
	основа	уток	основа	уток	по основе	по утку	основа	уток	основа	уток	основа	уток	основа	уток
	T_o	T_y	C_o	C_y	P_o	P_y	H_o	H_y	τ_o	τ_y	$h_{осн.ст}$	$h_{ут.ст}$	a_o	a_y
	18,5	25	1,25	1,25	275	235	0,0029	0,0023	0,95	0,98	0,21	0,15	9,4	8,07
Результаты вычислений при использовании линейной теории изгиба														
	Диаметр нити, мм		Координаты точек контакта в направлении оси z, мм				Высоты волн изгиба нитей в ткани , мм.				Сила нормального давления нитей основы и утка в точке контакта, Н		Относительное отклонение расчетных значений высот волн изгиба нитей от экспериментальных, %	
	основа	уток	первая точка	вторая точка	третья точка	четвертая точка	основа	уток	основа	уток				
Образец №2	d_o	d_y	h_1	h_2	h_3	h_4	h_{12}	$h_{13}=h_y$	$h_{34}=h_o$	$h_{24}=h_y$	N_{1o}		основа	уток
	0,1615	0,1937	0,0000	-0,0373	-0,0373	0,0000	0,1988	0,1564	0,1988	0,1564	0,0898		5,35	4,27
Результаты вычислений при использовании нелинейной теории изгиба														
	Длина нити в раппорте, мм		Координаты точек контакта в направлении оси z, мм				Высоты волн изгиба нитей в ткани , мм.				Сила нормального давления нитей основы и утка в точке контакта, Н		Относительное отклонение расчетных значений высот волн изгиба нитей от экспериментальных, %	
	основа	уток	первая точка	вторая точка	третья точка	четвертая точка	основа	уток	основа	уток				
	l_o	l_y	h_1	h_2	h_3	h_4	h_{12}	$h_{13}=h_y$	$h_{34}=h_o$	$h_{24}=h_y$	N_{1o}		основа	уток
	0,4796	0,4011	0,0000	-0,0397	-0,0397	0,0000	0,2012	0,1540	0,2012	0,1540	0,0779		4,19	-2,67

Как видно из таблиц, результаты расчета высот волн изгиба нитей по линейной и нелинейной теории изгиба имеют близкие значения (разница в значениях в пределах ошибки).

Для определения координат осевой линии изгиба основы или утка выражения (6) и (7) применительно к произвольной точке осевой линии изгиба нити основы и утка будут иметь следующий вид:

$$x'_{\text{o}} = \frac{2}{\sqrt{\frac{N}{H_o}}}\left[\int_0^{\psi_{\text{o}}} \sqrt{1-k_o^2 sin^2\psi}\,d\psi - \int_0^{\psi_{\text{To0}}} \sqrt{1-k_o^2 sin^2\psi}\,d\psi\right] - s_{\text{o}}, \qquad (35)$$

$$x'_{y} = \frac{2}{\sqrt{\frac{N}{H_y}}}\left[\int_0^{\psi_{\text{y}}} \sqrt{1-k_y^2 sin^2\psi}\,d\psi - \int_0^{\psi_{\text{To}y}} \sqrt{1-k_y^2 sin^2\psi}\,d\psi\right] - s_y\ , \qquad (36)$$

$$y'_{\text{o}} = \frac{2}{\sqrt{\frac{N}{H_o}}} k_{\text{o}}(\cos\psi_{\text{To0}} - \cos\psi_{\text{o}}), \qquad (37)$$

$$y'_{y} = \frac{2}{\sqrt{\frac{N}{H_y}}} k_{\text{y}}(\cos\psi_{\text{To}y} - \cos\psi_{\text{y}}), \qquad (38)$$

где $\psi_{\text{o}}, \psi_{\text{y}}$ – амплитуда эллиптического интеграла Лежандра для произвольной точки осевой линии нити основы и утка соответственно; $s_{\text{o}}, s_{\text{y}}$ – длина дуги в произвольной точке осевой линии изгиба основы и утка соответственно, отсчитываемая от ее начала.

Выражения (35)…(38) справедливы для определения координат осевой линии изгиба нити основы и утка в случае, если начало координат находится в начальной точке изгиба нитей (точках $T0_{\text{o}}$ для основы и $T0_{\text{y}}$ для утка) (рис. 1). Для определения пространственных координат осевых линий изгиба нитей в ткани для построения ее компьютерной модели перенесем начало координат осей по направлению приложенной силы в начало пространственной декартовой системы координат в точке 1 и запишем уравнения осевых линий изгиба основы и утка в пространственных декартовых осях. Для этого рассмотрим возможные варианты расположения начальной точки изгиба нити основы и утка относительно точки контакта (рис. 3).

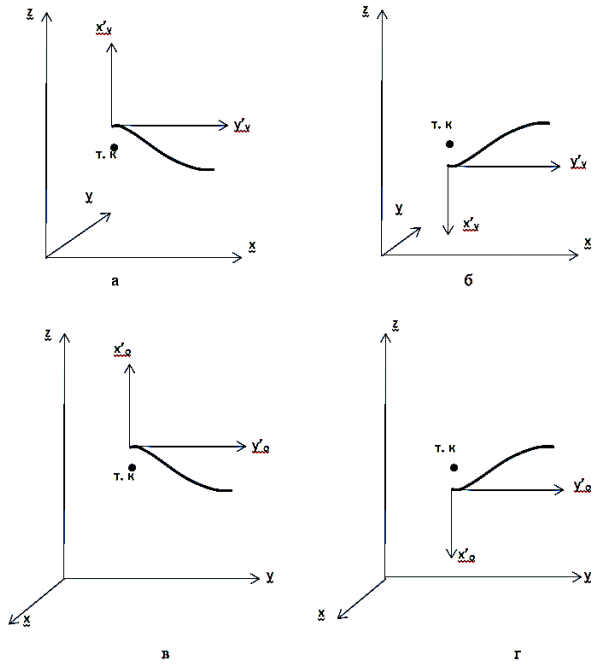


Рис. 3

В соответствии с направлением осей в пространственной системе координат, принятой в [1], нить утка располагается в плоскости zx или ей параллельной, нить основы – в плоскости zy или ей параллельной. В случае наличия в точке контакта на поверхности уточного перекрытия (рис. 3, а) ось x'$_y$ сонаправлена с осью z, так же как и в случае наличия в точке контакта на поверхности основного перекрытия (рис. 3, в) ось x'$_o$ сонаправлена с осью z. Когда в точке контакта на лицевой поверхности есть основное перекрытие (рис. 3, б), ось x'$_y$ направлена в сторону, противоположную оси z, так же как и в случае уточного перекрытия на лицевой поверхности ткани (рис. 3, г), следовательно, в этих случаях координаты x'$_y$ и x'$_o$ будем принимать со знаком минус. По методике [1] определим координаты точек контакта и координаты z_o, z_y, x, y (рис. 3) осевых линий изгиба нитей основы и утка относительно начала декартовой системы координат в пространстве для построения компьютерной модели ткани, принимая во внимание, что для любой точки любого переплетения однослойной ткани, т. е. для любого элемента из матрицы A (i,j), пространственная координата точки контакта в декартовых осях может быть записана следующим образом: A(i,j)=(x,y,z)=((j-1) ·100/Po; (i-1) ·100/Py; h(i,j)) [1], а также учтем следующее:

для любой нити основы в месте пересечки:

если в раппорте переплетения изображено основное перекрытие на пересечении i-й нити утка и j-й нити основы, т. е. в точке контакта основа выше утка, то

$$z_{oj} = x'_{oj} + h(i,j) + \frac{d_o}{2}, \qquad (39)$$

если в раппорте переплетения изображено уточное перекрытие на пересечении i-й нити утка и j-й нити основы, т. е. в точке контакта основа ниже утка, то

$$z_{oj} = -\left(x'_{oj}\right) + h(i,j) - \frac{d_o}{2}, \qquad (40)$$

$$y_j = y'_{oj} + (i-1)\cdot 100/P_y;$$

для любой нити утка в месте пересечки:

если в раппорте переплетения изображено основное перекрытие на пересечении i-й нити утка и j-й нити основы, т. е. в точке контакта уток ниже основы, то

$$z_{yi} = -\left(x'_{yi}\right) + h(i,j) - d_y/2, \qquad (41)$$
$$x_i = y'_{yi} + (j-1)\cdot 100/P_o;$$

если в раппорте переплетения изображено уточное перекрытие на пересечении i-й нити утка и j-й нити основы, т. е. в точке контакта уток выше основы, то

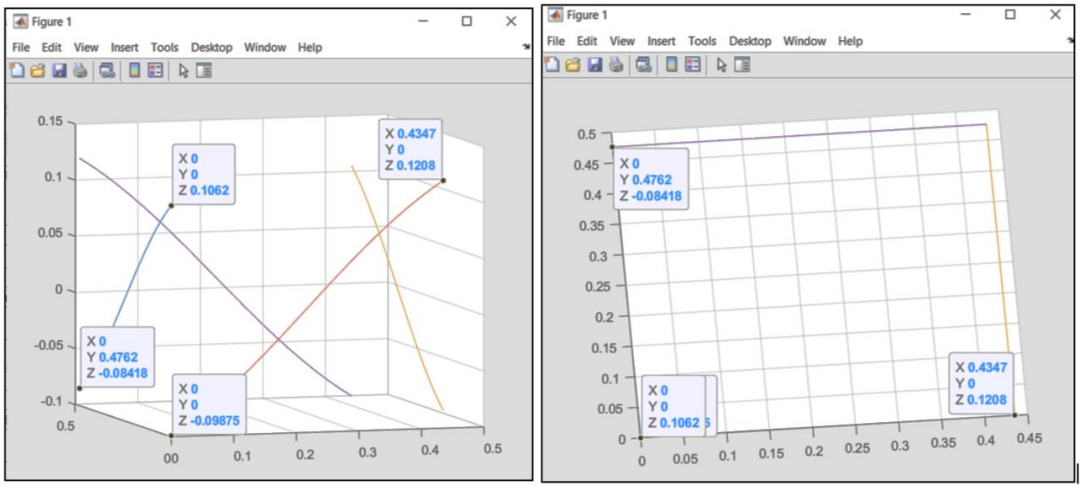
$$z_{yi} = x'_{yi} + h(i,j) + d_y/2, \qquad (42)$$
$$x_i = y'_{yi} + (j-1)\cdot 100/P_o,$$

где z_{oj}, z_{yi} – координата произвольной точки осевой линии изгиба j-й нити основы, i-й нити утка относительно начала декартовой системы координат в пространстве; $h(i,j)$ – координата точки контакта i-й нити утка и j-й нити основы.

С учетом выражений (35)…(42) и координат точек контакта нитей в пространстве получены уравнения для построения осевых линий изгиба нитей основы и утка в ткани полотняного переплетения (рис. 1). При этом учтено, что координата нити основы во второй точке контакта будет соответствовать конечной координате осевой линии изгиба этой нити основы, имеющей свое начало в точке контакта 1, координата нити утка в третьей точке контакта будет соответствовать конечной координате осевой линии изгиба этой нити утка, имеющей свое начало в точке контакта 1, и координаты осевой линии изгиба нитей основы и утка в четвертой точке контакта будут соответствовать конечным координатам осевых линий изгиба этих нитей, имеющих свое начало в точке контакта 2 (для утка) и в точке контакта 3 (для нити основы.)

На рис. 4 представлен графический результат проведенных расчетов по полученным формулам для построения осевых линий изгиба нитей основы и утка в ткани полтняного переплетения образца № 1 (рис. 4, а) и образца №2 (рис. 4, б). При этом весь интервал амплитуд от начальной до конечной точки изгиба нитей основы и

утка поделен на 20 интервалов, так же как и s_o, s_y, которые изменяются от 0 до l_o, l_y соответственно.



а) б)

Рис. 4

ВЫВОДЫ

1. Предложена система нелинейных уравнений для определения параметров осевых линий изгиба, которая позволяет рассчитать любую координату точки осевой линии изгиба нитей в ткани полотняного переплетения.

2. В общем виде предложены уравнения для определения пространственных координат осевых линий изгиба нитей основы и утка, позволяющие на их основе получать уравнения для расчета координат точек изгиба нитей основы и утка в месте их пересечки для любого переплетения главного класса.

3. Предложены формулы для определения пространственных координат осевых линий изгиба нитей основы и утка в ткани полотняного переплетения, что позволяет на основе полученных данных построить компьютерную модель данного переплетения, наиболее точно отражающую взаимное расположение нитей в тканом полотне.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Карева Т.Ю., Кожевникова Л.В., Кожевников С.О. и др.* Методика определения пространственных координат и геометрических характеристик однослойной ткани для построения ее компьютерной модели с учетом жесткостных характеристик используемых нитей // Изв. вузов. Технология текстильной промышленности. 2025. №1. С. 199…211.

2. *Юхин С.С., Цыцилина С.А.* Теоретический расчет параметров строения высокоплотных тканей с использованием нелинейной теории изгиба // Изв. вузов. Технология текстильной промышленности. 1997. № 1. С. 40...41.

3. *Николаев С.Д., Ковалева О.В., Ликучева А.А. и др.* Проектирование технологии тканей заданного строения. М.: МГТУ им. А.Н. Косыгина, 2007. 180 с.

4. *Егоров Н.В., Щербаков В.П.* Новый метод расчета жесткости нити при изгибе // Изв. вузов. Технология текстильной промышленности. 2010. № 5. С. 23...27.

5. *Гречухин А.П., Селиверстов В.Ю.* Исследование формы нити в ткани полотняного переплетения // Изв. вузов. Технология текстильной промышленности. 2013. № 5. С. 41...44.

6. *Авдусина А.В., Кожевникова Л.В., Грекова Т.Е., Карева Т.Ю.* Исследование параметров осевой линии изгиба и величины уработки нитей основы в однослойной ткани // Изв. вузов. Технология текстильной промышленности. 2014. № 1. С. 60…65.

7. *Lomov S.V., Verpoest I., Robitaille F.* Manufacturing and internal geometry of textiles, in Design and manufacture of textile composites, A. Long, Editor. 2005, Woodhead Publishing Ltd. P. 1…60.

8. *Ломов С.В.* Прогнозирование строения и механических свойств тканей технического назначения методами математического моделирования: дис. ... д-ра техн. наук. СПб., 1995. 486 с.

9. *Lomov S.V.* WiseTex – a virtual textile composites software. Advanced Weaving Technology. Y. Kyosev and F. Boussu, Springer Nature. 2022. P. 293…318.

10. *Lomov S.V.* Modeling the geometry of textile composite reinforcements: WiseTex - Chapter 7. Composite Reinforcements for Optimum Performance, ed. 2. P. Boisse. 2021. P. 199…236.

11. *Попов Е.П.* Теория и расчет гибких упругих стержней. М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1986.

R E F E R E N C E S

1. *Kareva T.Yu., Kozhevnikova L.V., Kozhevnikov S.O. etc.* The method of determining spatial coordinates and geometric characteristics of a single-layer fabric for the construction of its computer model taking into account the rigidity characteristics of the threads used // Izvestiya Vysshikh Uchebnykh Zavedenii, Seriya Teknologiya Tekstil'noi Promyshlennosti. 2025. №.1 P. 199…211.

2. *Yukhin S.S., Tsytsilina S.A.* Teoreticheskiy raschet parametrov stroyeniya vysokoplotnykh tkaney s ispolzovaniyem nelineynoy teorii izgiba // Izvestiya Vysshikh Uchebnykh Zavedenii, Seriya Teknologiya Tekstil'noi Promyshlennosti. 1997. № 1. P. 40...41.

3. *Nikolayev S.D., Kovaleva O.V., Likucheva A.A. etc.* Proyektirovaniye tekhnologii tkaney zadannogo stroyeniya. M.: MGTU im. A.N. Kosygina. 2007. 180 p.

4. *Egorov N.V., Shcherbakov V.P.* New method for calculating the bending stiffness of a thread // Izvestiya Vysshikh Uchebnykh Zavedenii, Seriya Teknologiya Tekstil'noi Promyshlennosti. 2010. № 5. P. 23...27.

5. *Grechukhin A.P., Seliverstov V.Yu.* Research of the tread form in plain weave fabric // Izvestiya Vysshikh Uchebnykh Zavedenii, Seriya Teknologiya Tekstil'noi Promyshlennosti. 2013. № 5. P. 41...44.

6. *Avdusina A.V., Kozhevnikova L.V., Grekova T.E., Kareva T.Yu.* Study of the parameters of the central bending line and the warp twist take-up in a single-layer fabric // Izvestiya Vysshikh Uchebnykh Zavedenii, Seriya Teknologiya Tekstil'noi Promyshlennosti. 2014. № 1. P. 60...65.

7. Lomov S.V., Verpoest I., Robitaille F. Manufacturing and internal geometry of textiles, in Design and manufacture of textile composites, A. Long, Editor. 2005, Woodhead Publishing Ltd. P. 1…60

8. *Lomov* S.V. Prognozirovanie stroeniyai mekhanicheskikh svoistv tkanei tekhnicheskogo naznacheniya metodami matematicheskogo modelirovaniya: dis. ... d-ra tekhn. nauk. Sankt-Peterburg, 1995. 486 p.

9. *Lomov S.V.* WiseTex – a virtual textile composites software. Advanced Weaving Technol-ogy. Y. Kyosev and F. Boussu, Springer Nature. 2022. P. 293…318.

10. *Lomov S.V.* Modeling the geometry of textile composite reinforcements: WiseTex - Chapter 7. Composite Reinforcements for Optimum Performance, ed. 2. P. Boisse. 2021. P. 199…236.

11. *Popov E.P.* Teoriya i raschet gibkikh uprugikh sterzhney. M.: Nauka. Gl. red.fiz.-mat. lit., 1986

Рекомендована НОЦ «Центр компетенций текстильной и легкой промышленности» ИВГПУ. Поступила 17.07.24.