УДК 621.928
DOI 10.47367/0021-3497_2026_3_262

СТОХАСТИЧЕСКАЯ ЯЧЕЕЧНАЯ МОДЕЛЬ ВИБРАЦИОННОГО ФРАКЦИОНИРОВАНИЯ СЫПУЧИХ МАТЕРИАЛОВ С УЧЕТОМ ВРЕМЕННОЙ ИЗМЕНЧИВОСТИ СКОРОСТИ ПРОСЕИВАНИЯ*

STOCHASTIC CELL MODEL OF VIBRATORY FRACTIONATION OF BULK MATERIALS TAKING INTO ACCOUNT TIME VARIABILITY OF SIEVING RATE

В.А. ОГУРЦОВ[1], А.М. ИБРАГИМОВ[2], Л.Ю. ГНЕДИНА[2], А.В. ШЕНБЕРЕВА[1]

V.A. OGURTSOV[1], A.M. IBRAGIMOV[2], L.Yu. GNEDINA[2], A.V. SHENBEREVA[1]

**([1]Ивановский государственный политехнический университет,
[2]Национальный исследовательский Московский государственный строительный университет)**

**([1]Ivanovo State Polytechnic University,
[2]National Research Moscow State University of Civil Engineering)**

E-mail: ogurtzovvawork@mail.ru, IbragimovAM@mgsu.ru

Рассматривается процесс фракционирования (сепарации) сыпучих сред на вибрирующей металлической тканой сетке полотняного переплетения. В работе предложена редуцированная стохастическая модель процесса, основанная на аппарате дискретных цепей Маркова. Модель учитывает три ключевых механизма переноса частиц в виброожиженном слое: сегрегацию, диффузионное перемешивание и прохождение частиц через просеивающую поверхность. Введен параметр, характеризующий интенсивность просеивания, рассматриваемый как функция времени. Его идентификация выполнена на основе данных вычислительного эксперимента, реализованного методом дискретных элементов (DEM). В отличие от традиционных моделей с постоянными параметрами, предложенный подход позволяет учитывать нестационарный характер процесса. Показано, что учет временной изменчивости скорости просеивания способствует более согласованному описанию кинетики извлечения частиц по сравнению с моделью с постоянным параметром. Разработанная модель обеспечивает получение как интегральных, так и локальных характеристик процесса при существенно меньших

* Публикация подготовлена в рамках конкурса 2026 года на проведение фундаментальных и прикладных научных исследований (НИР/НИОКР) научными коллективами организаций – членов и стратегических партнеров Отраслевого консорциума «Строительство и архитектура», договор № ИВГПУ/К-26 от 12 мая 2026 г.

вычислительных затратах по сравнению с DEM. Предложенный подход может быть использован для инженерного анализа и оптимизации процессов вибрационного фракционирования. Перспективы дальнейших исследований связаны с экспериментальной валидацией модели.

The fractionation (separation) of bulk solids on a vibrating metal mesh with a plain weave is considered. A reduced stochastic model of the process based on the apparatus of discrete Markov chains is proposed. The model takes into account three key mechanisms of particle transport in a vibrating fluidized bed: segregation, diffusive mixing, and particle passage through the sieving surface. A parameter characterizing the sieving intensity, considered as a function of time, is introduced. Its identification is based on data from a computational experiment implemented using the discrete element method (DEM). In contrast to traditional models with constant parameters, the proposed approach allows for the non-stationary nature of the process. It is shown that taking into account the time variability of the sieving rate provides a more consistent description of the particle extraction kinetics compared to the model with a constant parameter. The developed model allows obtaining both integral and local characteristics of the process at significantly lower computational costs compared to DEM. The proposed approach can be used for engineering analysis and optimization of vibratory fractionation processes. Prospects for further research are associated with experimental validation of the model.

Ключевые слова: вибрационное фракционирование, сыпучие материалы, цепи Маркова, DEM, стохастическое моделирование, кинетика просеивания.

Keywords: vibration fractionation, bulk materials, Markov chains, DEM, stochastic modeling, sifting kinetics.

Введение

Рассматривается процесс фракционирования сыпучих сред на вибрирующей металлической тканой сетке полотняного переплетения с квадратными ячейками, конструктивной особенностью которой является переплетение проволок основы и утка через одну проволоку. Сетка характеризуется размером стороны ячейки в свету и диаметром проволоки. За размер стороны ячейки в свету принимается расстояние между соседними проволоками основы или утка. Металлические сетки для просеивания сыпучих материалов – это незаменимые инструменты в химической, строительной, горнорудной, пищевой и фармацевтической промышленности [1]. Они служат главным рабочим органом грохотов, вибросит и лабораторных рассевов, обеспечивая разделение частиц по крупности.

Эффективность разделения определяется сложным взаимодействием свойств частиц, структуры слоя и параметров вибрационного воздействия. При воздействии вибрации слой сыпучего материала переходит в состояние, близкое к виброожиженному, в котором одновременно протекают процессы направленного перемещения частиц (сегрегации) и их случайного перемешивания (диффузии). Эти процессы определяют вероятность достижения частицами просеивающей поверхности и их последующего прохождения через отверстия сита.

В настоящее время для математического описания процесса фракционирования используются три основных подхода: дискретный (метод дискретных элементов DEM); континуальный (уравнение Фоккера – Планка – Колмогорова); стохастический (цепи Маркова).

Континуальные модели позволяют описывать перенос частиц в виде конвективно-диффузионного процесса, используя уравнение:

$$\frac{\partial c(x,t)}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial x}(c(x,t)V) + \frac{\partial}{\partial x} D \frac{\partial c(x,t)}{\partial x}, \quad (1)$$

где D – коэффициент макродиффузии; V – скорость сегрегации; c(x,t) – концентрация частиц рассматриваемого компонента по пространству внутри виброожиженного слоя.

Однако применение уравнения (1) в инженерных расчетах ограничено сложностью получения аналитических решений для нестационарных режимов.

Дискретные методы, напротив, обладают высокой точностью, но характеризуются значительной вычислительной трудоемкостью.

В этой связи представляется целесообразным использование редуцированных стохастических моделей, способных воспроизводить основные кинетические закономерности процесса при существенно меньших вычислительных затратах.

Значительно упростить моделирование движения частиц в виброожиженном слое позволяет подход, опирающийся на математический аппарат теории цепей Маркова [2…6].

Цель исследования: разработка дискретной стохастической ячеечной модели на основе цепей Маркова, идентификация ее параметров по данным виртуального эксперимента и оценка влияния временной зависимости скорости просеивания на точность прогнозирования кинетики фракционирования.

Предложена и реализована процедура параметрической идентификации ячеечной модели на основе цепей Маркова с переменной во времени скоростью просеивания. Разработана процедура идентификации параметров стохастической модели на основе данных вычислительного эксперимента (DEM), позволяющая: определять эффективные коэффициенты модели, учитывать нестационарный характер процесса. Показано, что учет временной зависимости параметра, характеризующего прохождение частиц через сито, оказывает существенное влияние на прогноз кинетики извлечения.

Методы

Примененная дискретная модель теории цепей Маркова аппроксимирует непрерывное уравнение переноса [5]. Она хорошо зарекомендовала себя при вероятностном описании сложных стохастических систем [4…8].

Слой сыпучей среды, подверженной вибровоздействию со стороны сита, дискретизирован на m-1 элементарных ячеек высотой Δx. Ячейка m соответствует подситовому пространству. Все ячейки образуют полное пространство возможных координат частиц целевой фракции в аппарате. Система описывается вектором-столбцом состояния, который в транспонированном виде определится выражением

$$S = [S_1 S_2 \ldots S_m]^T. \quad (2)$$

Перемещение частиц между ячейками описывается стохастической матрицей P, элементы которой задают вероятности переходов:

$$P = \begin{bmatrix} 1-d-v & d & \ldots & 0 & 0 \\ d+v & 1-2d-v & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & d+v & \ldots & 0 & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & d & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots & 1-d-v_f & 0 \\ 0 & 0 & \ldots & v_f & 1 \end{bmatrix}. \quad (3)$$

Параметр d (безразмерный коэффициент диффузии) характеризует симметричный обмен частицами с соседними ячейками, параметр v (безразмерная скорость сегрегации) отвечает за преимущественное смещение ключевого компонента вниз, параметр v_f (безразмерная скорость проникновения частиц ключевого компонента че-

рез отверстия сита) отвечает за вероятность сепарации, определяемой как доля частиц ключевого компонента (с диаметром, меньшим апертуры сита), которые, достигнув просеивающей поверхности в течение интервала Δt, покидают рабочий объем, переходя в подрешетный продукт. В работах [2, 3, 8] скорость проникновения частиц через отверстия сита считалась постоянной или пропорциональной высоте слоя сыпучего материала. В рамках данной работы количественно зафиксирована и параметризована временная динамика $v_f(t)$ в условиях контролируемого виртуального эксперимента. Эволюция системы во времени задается итерационным применением матричного оператора к вектору состояния:

$$S^{k+1} = PS^k . \qquad (4)$$

Модель оперирует дискретным временем с шагом Δt исходя из принципа локальности: за один шаг частица может переместиться только в соседнюю ячейку. Моменты времени процесса определяются как $t_k = k\,\Delta t$. Корректность такого приближения обеспечивается условием малости шага Δt по сравнению с характерным временем эволюции системы. Связь безразмерных параметров с макроскопическими коэффициентами уравнения ФПК задается выражениями: $v = V\,\Delta t / \Delta x$, $d = D\,\Delta t / \Delta x^2$.

Выход частиц в подрешетное пространство на каждом переходе может быть рассчитан по формуле

$$q(k) = S_{m-1}^{k} v_{f.} \qquad (5)$$

Степень извлечения проходовых частиц ключевого компонента в зависимости от времени рассева, то есть кинетика процесса, рассчитывается как

$$E(k) = \sum_{k=1}^{k} q(k) . \qquad (6)$$

Периодическое вибрационное фракционирование реальных сыпучих материалов в лабораторных условиях ранее рассматривалось, в частности, в работах [9, 10]. По организационной схеме такие испытания проще, чем эксперименты на установках непрерывного действия, однако они остаются достаточно трудоемкими. Необходимо предварительно настроить вибропривод, выполнить ситовой анализ исходного материала, зафиксировать промежуточные состояния процесса и итоговый состав продуктов разделения. Кроме того, из-за стохастической природы движения частиц единичный опыт не может служить достаточным основанием для определения коэффициентов модели. Для получения устойчивых средних оценок требуется серия повторных испытаний.

Для предварительной отработки процедуры определения параметров ячеечной модели целесообразно использовать имитационный эксперимент, построенный на методе дискретных элементов (DEM) и реализованный в программной среде трехмерного моделирования движения частиц. Такой подход позволяет задать контролируемые условия расчета: фиксировать форму и размеры частиц, исключать случайное изменение внешних факторов, а при необходимости изменять только один параметр режима, например, частоту колебаний сита. Благодаря этому можно проследить влияние отдельных факторов на кинетику рассева и получить массив данных, пригодный для настройки редуцированной модели. В настоящей работе DEM-модель рассматривается не как замена натурному эксперименту, а как расчетный эталон для сопоставления с моделью цепей Маркова и проверки корректности выбранной схемы параметризации.

Для получения данных использован метод дискретных элементов (DEM), в рамках которого движение частиц рассчитывается на основе второго закона Ньютона с учетом контактных взаимодействий. Модель учитывает: нормальные и тангенциальные контактные силы, трение по закону Кулона, коэффициент восстановления, вибрационное воздействие [11]. DEM используется в данной работе как модель сравнения для анализа поведения редуцированной модели.

В рамках настоящей статьи натурный эксперимент не проводился. Роль "экспериментальных данных" для идентификации

параметров ячеечной модели и проверки гипотез выполнял виртуальный эксперимент, настроенный на параметры реальной физической системы (геометрия сита, свойства частиц, режим вибрации). Такой подход не является верификацией в строгом смысле (сравнение с натурой), однако он позволяет: изолированно изучать влияние отдельных факторов на кинетику сепарации; получать локальные данные (эволюцию распределения частиц по ячейкам), недоступные в реальном физическом эксперименте; служить методической основой для последующей валидации модели на натурных данных, которая является задачей следующих этапов исследования.

Достоверность виртуального эксперимента в данной работе обеспечивается: использованием физических параметров частиц и сита (плотность, упругость, трение, коэффициент реституции), взятых из лабораторных испытаний и справочных данных; согласованностью результатов DEM-моделирования с известными закономерностями процесса вибрационного фракционирования (увеличение доли просеявшихся частиц во времени, преимущественное просеивание мелких фракций); воспроизводимостью интегральных показателей (кинетика извлечения) при повторных запусках модели с разными начальными условиями.

Результаты и обсуждения

Виртуальный эксперимент проводился на аппарате периодического фракционирования, который представлял собой прозрачный короб с просеивающим полотном размером 160x160 мм из металлических проволок диаметром 1 мм и размером квадратной ячейки 12 мм. Площадь такой сетки в свету составляла S=23716 мм^2.

Для частиц смеси были определены физические характеристики: плотность, коэффициенты трения, упругости, коэффициенты восстановления скорости при соударении частиц друг с другом и просеивающим полотном. В рассмотренном опыте имитировался процесс фракционирования смеси из 190 крупных частиц диаметром 23 мм и 1500 мелких диаметром 10 мм. Аппарат совершал вертикальные колебания с амплитудой 5 мм и частотой 8,4 Гц.

Создание виртуального эксперимента процесса обеспечивало наглядную динамическую визуализацию перемещения и распределения частиц в рабочей камере в реальном времени, отображаемую в специализированном окне интерфейса вычислительной системы (рис. 1).

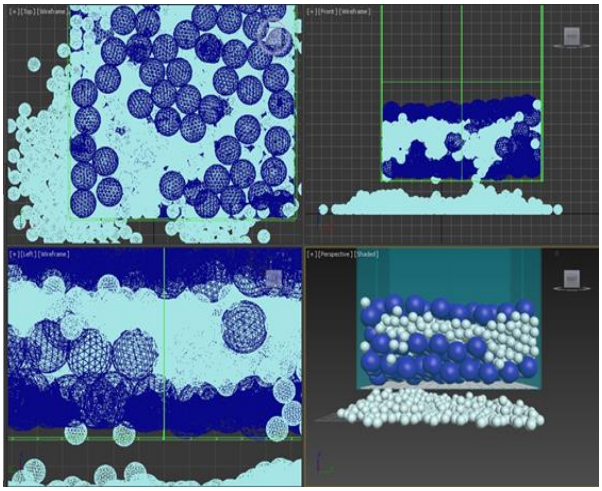
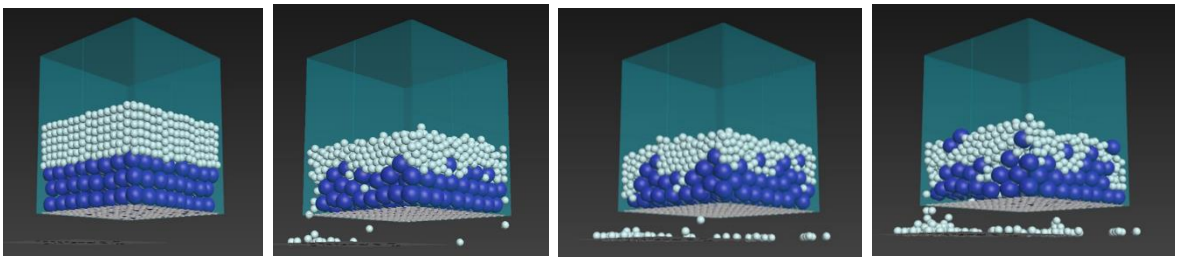


Рис. 1

Полученное анимационное представление легло в основу качественной и количественной оценки кинетических закономерностей процесса, а также позволило выполнить последующее сравнение с расчетными данными стохастической ячеечной модели. Для различных моментов времени получены интегральные показатели процесса, а именно степень извлечения мелких частиц в подситовое пространство. Так как программное обеспечение позволяло отслеживать траектории движения всех частиц, то были получены локальные показатели процесса, то есть эволюция распределения частиц ключевого компонента по ячейкам цепи, что является принципиально недостижимой задачей для натурного промышленного эксперимента или лабораторного классифицирующего оборудования.

На рис. 2 показан процесс фракционирования смеси в различные моменты времени.

Виртуальные эксперименты доказали положение о том, что скорость проникновения частиц через отверстия сита существенно изменяется в течение процесса фракционирования.



t=0 t=5 секунд t=10 секунд t=15 секунд

Рис. 2

В первом расчетном интервале длительностью Δτ = 0…5 с в подситовое пространство перешли 14 частиц проходовой фракции. На основе объема одной частицы, принятой сферической, был определен объемный расход мелкой фракции за единицу времени:

$$V_1 = \frac{1}{6}\pi d^3 \cdot \frac{N_1}{\Delta\tau} = \frac{1}{6} 3{,}14 \cdot 10^3 \cdot 10^{-9} \cdot \frac{14}{5} = = 1{,}465 \cdot 10^{-6} \frac{\text{м}^3}{\text{с}}. \quad (7)$$

Далее по полученному расходу была рассчитана скорость прохождения частиц через отверстия просеивающей поверхности:

$$V_{f1} = \frac{V_1}{S} = \frac{1{,}465 \cdot 10^{-6}}{23716 \cdot 10^{-6}} = 0{,}618 \cdot 10^{-4} \frac{\text{м}}{\text{с}}. \quad (8)$$

В ячеечной схеме эта величина переводится в безразмерный параметр, характеризующий вероятность выхода частицы из нижней рабочей ячейки слоя в подситовое пространство за один временной шаг. Для рассматриваемого перехода он задается выражением:

$$v_{f1} = \frac{V_{f1} \cdot \Delta t}{\Delta x} = \frac{0{,}618 \cdot 10^{-4}}{23 \cdot 10^{-3}} \cdot 0{,}5 = 1{,}343 \cdot 10^{-3}, \quad (9)$$

где Δt = 0,5 с – шаг времени в ячеечной модели; Δx = $23 \cdot 10^{-3}$ м – высота одной расчетной ячейки. Значение Δx принято исходя из высоты слоя сыпучего материала над ситом, равной 138 мм, и разбиения слоя на шесть рабочих ячеек; седьмая ячейка соответствует подситовому пространству.

Аналогичный расчет выполнен для последующих интервалов времени. В промежутке Δτ =5…10 с через сито прошло 19 частиц, а в промежутке Δτ =10…15 с – 22 частицы. По формулам (7)…(9) получены соответствующие значения безразмерной скорости прохождения частиц через отверстия сита для второго и третьего временных интервалов: $v_{f2} = 1{,}822 \cdot 10^{-3}$, $v_{f3} = 2{,}206 \cdot 10^{-3}$. Далее такая процедура применялась ко всей продолжительности рассева, вплоть до полного извлечения мелкой фракции из исходной смеси. В рассматриваемом виртуальном эксперименте этот момент был достигнут к 145-й секунде процесса.

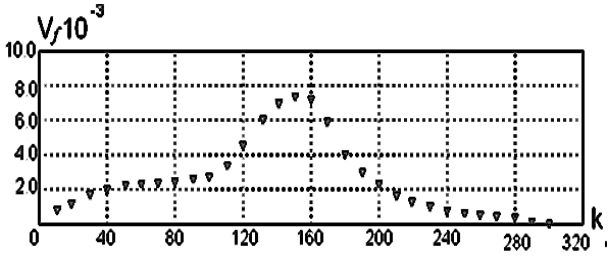


Рис. 3

Рис. 3 демонстрирует, как меняются безразмерные скорости просеивания с течением времени фракционирования. Значения этих скоростей использовались при расчете интегральных и локальных характеристик процесса по ячеечной модели.

На рис. 4 представлены расчетно-экспериментальные исследования кинетики процесса. Расчетная кривая 1 соответствует варианту, когда скорость просеивания считается постоянной. Расчетная кривая 2 учитывает изменения скорости просеивания от времени процесса. Как видно из рис. 4, кривая 1 дает завышенный результат эффективности процесса рассева. Кривая 2 адекватно описывает результаты виртуального эксперимента.

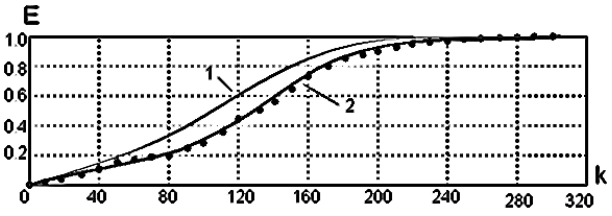


Рис. 4

Идентификация экспериментальных данных степени извлечения мелких частиц из исходной смеси в различные моменты времени, полученных с помощью цифрового двойника аппарата, и расчетных кривых накопления мелких частиц в подситовом пространстве, полученных с использованием модели цепей Маркова и результатов расчета скорости просеивания, позволила определить стохастические коэффициенты модели: безразмерный коэффициент макродиффузии d= $2,33 \cdot 10^{-3}$ и безразмерную скорость сегрегационного расслоения v = $7,67 \cdot 10^{-3}$.

На рис. 5 представлены результаты сравнения расчетного и экспериментального распределения частиц ключевого компонента смеси по высоте слоя сыпучего материала на ситовом полотне в различные моменты времени (точки – компьютерный эксперимент, гистограмма – расчет по ячеечной модели) .

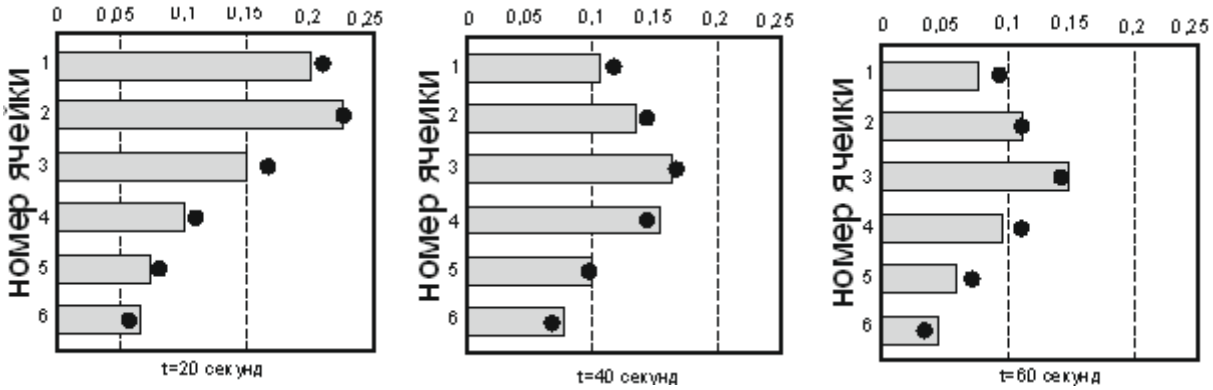


Рис. 5

Опираясь на методы статистической обработки данных [12], а также на результаты ячеечного моделирования и виртуальных экспериментов на компьютере, имеем: средняя абсолютная ошибка (MAE) = 0.007, среднеквадратичная ошибка (RMSE) = 0.009 – погрешность незначительна (≤ 4% от среднего значения). Статистическая значимость оценена на уровне α=0,05, коэффициент детерминации R^2=0,97. Модель адекватна и может использоваться для прогнозирования локальных и интегральных характеристик процесса виброфракционирования с высокой достоверностью.

Представленная модель имеет следующие ограничения, которые необходимо учитывать при интерпретации результатов для дальнейшего применениия. Сферическая форма частиц принята для снижения размерности пространства состояний при идентификации стохастических коэффициентов на первом этапе. Реальные частицы (осколочные, игольчатые, пластинчатые, неправильной формы) будут демонстрировать иную кинетику просеивания и иные значения параметров, что потребует повторной калибровки для каждого типа частиц. Модель включает две фракции. Для полидисперсных систем потребуется расширение модели на многокомпонентную цепь Маркова.

Данная работа носит методический характер. Роль "экспериментальных данных" выполняет верифицированная компьютерная модель. Прямое сравнение с натурным виброситом является задачей следующих этапов исследования. Промышленное масштабирование потребует учета краевых эффектов, возможной неравномерности вибрационного поля по площади сита, а также изменения динамической обстановки в слое.

ВЫВОДЫ

Разработана стохастическая модель вибрационного фракционирования, учитывающая временную изменчивость скорости просеивания. Показано, что параметр просеивания является нестационарным, его учет улучшает описание кинетики процесса.

Разработанная компьютерная модель обеспечивает получение как интегральных показателей (кинетика процесса), так и локальных данных (эволюция распределения частиц по ячейкам), недоступных в натурных экспериментах, что подтверждает адекватность предложенного подхода. Предложенная методика (компьютерное моделирование → идентификация v_f → цепи Маркова с переменным параметром) позволяет тестировать различные режимы вибровоздействия (частота, амплитуда) без проведения дорогостоящих натурных экспериментов и служит основой для создания редуцированных моделей, пригодных для инженерных расчетов.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Пирогов Д.А., Тувин А.А., Гусев Б.Н.* Комплексная оценка качества тканых металлических сеток // Известия вузов. Технология текстильной промышленности. 2011. №1. С. 19…22.

2. *Мизонов В.Е., Berthiaux H.* Применение теории цепей Маркова в химической инженерии // Международный Косыгинский форум. М., 2021. С. 65…69. – DOI: 10.37816/eeste-2021-p-65-69.

3. *Огурцов В.А., Хохлова Ю.В., Алешина А.П., Огурцов А.В.* К расчету процесса вибросепарации на ситовых тканях сыпучих материалов с высоким содержанием частиц мелких фракций // Известия вузов. Технология текстильной промышленности. 2023. № 4. С. 257…261.

4. *Mitrofanov A., Mizonov V., Camelo A., Tannous K.* Application of the theory of Markov chains to theoretical study of processes in a circulating fluidized bed // Particulate Science and Technology. 2019. Vol. 37. No. 8. P. 1028…1033. – DOI: 10.17654/HM01802026.

5. *Митрофанов А.В., Сизова О.В., Шпейнова Н.С. и др.* Исследование устойчивости разностной схемы метода счетных цепей Маркова для моделирования псевдоожижения // Вестник Ивановского государственного энергетического университета. 2021. № 4. С. 65…74. – DOI: 10.17588/2072-2672.2021.4.065-074.

6. *Mitrofanov A.V., Mizonov V.E., Tannous K., Ovchinnikov L.N.* A Markov chain model to describe fluidization of particles with time-varying properties // Particulate Science and Technology. 2018. Vol. 36. No. 2. Pp. 244…253.

7. *Митрофанов А.В., Василевич С.В., Шпейнова Н.С., Зарубин З.В.* Разработка модели аппарата кипящего слоя с рубашкой охлаждения // Промышленные процессы и технологии. 2023. Т. 3, № 1. С. 15…23.

8. *Федосов С.В., Мизонов В.Е.* Теоретические основы математического моделирования механических и тепловых процессов в производстве строительных материалов: монография. Palmarium Academic Publishing, 2020. 256 с.

9. *Огурцов В.А., Крупнов Е.И., Алешина А.П. и др.* Двухмерная модель фракционирования мелкодисперсных сыпучих материалов на ситовых тканях // Известия высших учебных заведений. Технология текстильной промышленности. 2021. № 1 (391) С. 133…137. – DOI 10.47367/0021-3497_2021_1_133/

10. *Mizonov V.E., Balagurov I.A., Berthiaux H., Gatumel C.* Theoretical search for optimum hold-up in a batch mixer of particulate solids // Izv. Vyssh. Uchebn. Zaved. Khim. Khim. Tekhnol. 2018. Vol. 61. N. 4-5. P. 93…97.

11. *Караваев А.С., Копысов С.П., Сармакеева А.С.* Моделирование динамики произвольных тел методом дискретных элементов // Вестник Удмуртского университета. Математика. Механика. Компьютерные науки. 2015. Т. 25. № 4. С. 473…482.

12. *Kumar R., Singh V., Gupta A.* Assessment of model accuracy using Pearson correlation coefficient and error metrics: Guidelines for researchers in applied sciences // MethodsX. 2023. Vol. 10. P. 102…123. – DOI: 10.1016/j.mex.2023.102123.

REFERENCES

1. *Pirogov D.A., Tuvin A.A., Gusev B.N.* Complex quality estimation of woven metal meshes // Izvestiya Vysshikh Uchebnykh Zavedenii, Seriya Teknologiya Tekstil'noi Promyshlennosti. 2011. No. 1. Pp. 19…22.

2. *Mizonov V.E., Berthiaux H.* Application of Markov chain theory in chemical engineering // Mejdunarodnii Kosiginskii forum. Moscow, 2021. S. 65…69. – DOI: 10.37816/eeste-2021-p-65-69.

3. *Ogurtsov V.A., Khokhlova Yu.V., Aleshina A.P., Ogurtsov A.V.* To the calculation of the vibration separation process on sieve fabrics of bulk materials with a high content of fine particles // Izvestiya Vysshikh Uchebnykh Zavedenii, Seriya Teknologiya Tekstil'noi Promyshlennosti. 2023. No. 4. Pp. 257…261.

4. *Mitrofanov A., Mizonov V., Camelo A., Tannous K.* Application of the theory of Markov chains to theoretical study of processes in a circulating fluidized bed // Particulate Science and Technology. 2019. Vol. 37. No. 8. P. 1028…1033. DOI: 10.17654/HM01802026.

5. *Mitrofanov A.V., Sizova O.V., Shpeynova N.S. etc.* Research of the Stability of the Difference Scheme of the Markov Chain Method for Modeling Fluidization // Vestnik of the Ivanovo State Power Engineering

University. 2021. No. 4. Pp. 65…74. – DOI: 10.17588 /2072-2672.2021.4.065-074.

6. *Mitrofanov A.V., Mizonov V.E., Tannous K., Ovchinnikov L.N.* A Markov chain model to describe fluidization of particles with time-varying properties // Particulate Science and Technology. 2018. Vol. 36. No. 2. Pp. 244…253.

7. *Mitrofanov A.V., Vasilevich S.V., Shpeynova N.S., Zarubin Z.V.* Development of a model of a fluidized bed apparatus with a cooling jacket // Industrial Processes and Technologies. 2023. Vol. 3, No. 1. Pp. 15…23.

8. *Fedosov S.V., Mizonov V.E.* Theoretical Foundations of Mathematical Modeling of Mechanical and Thermal Processes in the Production of Building Materials: A Monograph. Palmarium Academic Publishing, 2020. 256 p.

9. *Ogurtsov V.A., Krupnov E.I., Aleshina A.P. etc.* Two-dimensional model of vibroseparation of fine bulk materials through the holes of fabric sieve // Izvestiya Vysshikh Uchebnykh Zavedenii, Seriya Teknologiya Tekstil'noi Promyshlennosti. 2021. No. 1 (391) Pp. 133…137. – DOI 10.47367/0021-3497_2021_1_133/

10. *Mizonov V.E., Balagurov I.A., Berthiaux H., Gatumel C.* Theoretical search for optimum hold-up in a batch mixer of particulate solids // Izv. Vyssh. Uchebn. Zaved. Khim. Khim. Tekhnol. 2018. Vol. 61. N. 4-5. P. 93…97.

11. *Karavaev A.S., Kopysov S.P., Sarmakeeva A.S.* Modeling dynamics of arbitrary bodies by the method of discrete elements // Bulletin of the Udmurt University. Mathematics. Mechanics. Computer science. 2015. Vol. 25. No. 4. pp. 473...482.

12. *Kumar R., Singh V., Gupta A.* Assessment of model accuracy using Pearson correlation coefficient and error metrics: Guidelines for researchers in applied sciences // MethodsX. 2023. Vol. 10. P. 102…123. – DOI: 10.1016/j.mex.2023.102123.

Рекомендована кафедрой строительства и инженерных систем ИВГПУ. Поступила 17.05.2026.